TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Musterlösungen zu den Übungsaufgaben

Theoretische Elektrotechnik

Übungszyklus Wintersemester 2012/13 und Sommersemester 2013

Basierend auf Mitschriften der Übungen von Dipl.-Ing. Fabian Ossevorth
und M. Sc., Dipl.-Ing. (FH) André Manicke sowie eigenen Ausarbeitungen

Version vom 12. Oktober 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen **5**
1.1 Metrische Faktoren . . . 5
1.2 Koordinatentransformation für eine Vektorfunktion . . . 7
1.3 Wegintegral einer Vektorfunktion . . . 8
1.4 Differentialoperatoren - Definition, Rechengesetze und Spezialfälle . . . 9
1.5 Oberflächenintegral einer Vektorfunktion . . . 13
1.6 Berechnung der Skalarfunktion einer Vektorfunktion 1 . . . 13
1.7 Berechnung der Skalarfunktion einer Vektorfunktion 2 . . . 14
1.8 Anwendung des Laplace-Operators . . . 14
1.9 Prüfen auf Quellen und Wirbel . . . 15
1.10 Quellenfreies Wirbelfeld und wirbelfreies konservatives Vektorfeld . . . 15

2 Maxwell-Gleichungen und abgeleitete Gleichungen **16**
2.1 Maxwell-Gleichungen in Differentialform . . . 16
2.2 Überführung der Maxwell-Gleichungen von Differential- in Integralform . . . 16
2.3 Poisson-Gleichung für homogenes dielektrisches Medium . . . 17
2.4 Poisson-Gleichung für homogenes permeables Medium . . . 17
2.5 Poisson-Gleichung für inhomogenes dielektrisches Medium . . . 17
2.6 Entkoppelung der Maxwell-Gleichungen . . . 18
2.7 Diffusionsgleichung . . . 18
2.8 Wellengleichung (Helmholtzgleichung) . . . 19
2.9 Kontinuitätsgleichung . . . 19
2.10 Relaxationszeit . . . 20

3 Elektrostatik - Punktladungen **21**
3.1 Drei Punktladungen . . . 21
3.2 Vier Punktladungen . . . 21
3.3 Bewegen von Ladungen im Potentialfeld . . . 22

4 Elektrostatik - Coulombintegral **23**
4.1 Linienladung 1 . . . 23
4.2 Linienladung 2 . . . 24
4.3 Kreisring mit Linienladung . . . 24
4.4 Kreisbogen mit Linienladung . . . 25
4.5 Geschlossener Halbkreisbogen mit Linienladung . . . 25
4.6 Kreisscheibe mit konstanter Flächenladungsdichte . . . 25
4.7 Kreisscheibe mit ortsabhängiger Flächenladungsdichte . . . 26
4.8 Parallele Platten mit Flächenladung . . . 27
4.9 Homogene Raumladung in Form einer Kugel . . . 28

5 Elektrostatik - Gaußsche Methode **29**
5.1 Unendlich langer Zylinderkondensator . . . 29
5.2 Kugel mit homogener Raumladungsverteilung . . . 31

6 Elektrostatik - Poisson- und Laplace-Gleichung **32**
6.1 Kugel mit homogener Raumladungsverteilung . . . 32

7 Elektrostatik - Spiegelungsprinzip 34
7.1 Punktladung über leitender Ebene, influenzierte Ladung . . . 34
7.2 Punktladung in einer rechtwinkligen Ecke aus leitendem Material . . . 35
7.3 Punktladung in einem rechtwinkligen Luftspalt aus leitendem Material . . . 36
7.4 Punktladung innerhalb einer leitenden und geerdeten Hohlkugel . . . 37
7.5 Punktladungen und Hohlkugel 1 . . . 39
7.6 Punktladungen und Hohlkugel 2 . . . 40
7.7 Punktladung innerhalb einer Hohlkugelhälfte über leitender Ebene . . . 41
7.8 Punktladung über einer dielektrischen Grenzschicht . . . 42
7.9 Punktladung und Hohlkugel mit Dielektrika . . . 43
7.10 Zwei Punktladungen innerhalb einer geerdeten Kugel mit 2 Dielektrika . . . 44

8 Elektrostatik - Elektrisches Dipolmoment 46
8.1 Elektrischer Dipol im Feld einer Punktladung (Näherung Punktdipol) . . . 46
8.2 Punktladung im Feld eines elektrischen Dipols . . . 46
8.3 Kreisförmige Doppelschicht mit konstanter Dipolmomentdichte . . . 47
8.4 Feld von zwei elektrischen Dipolen . . . 47
8.5 Dipol über einer leitenden Ebene . . . 47
8.6 Elektrischer Dipol im Feld einer Punktladung . . . 48

9 Elektrostatik - Kapazität und Energie im Dielektrikum 49
9.1 Kapazität eines Kugelkondensators . . . 49
9.2 Kapazität einer Koaxialleitung . . . 50
9.3 Kapazität eines Kugelkondensators mit inhomogenem Dielektrikum . . . 50
9.4 Energie in einer dielektrischen Kugel . . . 51
9.5 Energie in einer geladenen Kugel . . . 51
9.6 Energie in zwei dielektrischen Schichten . . . 52

10 Stationäres Strömungsfeld 53
10.1 Stromdurchflossener Bügel . . . 53
10.2 Halbkugelerder . . . 54
10.3 Stromdurchflossenes Hohlzylindersegment . . . 55
10.4 Zylindrischer Leiter mit ortsabhängiger Leitfähigkeit . . . 56

11 Magnetostatik - Durchflutungs- und Induktionsgesetz 57
11.1 Magnetischer Fluss durch eine ruhende rechteckige Leiterschleife . . . 57
11.2 Magnetischer Fluss durch eine bewegte rechteckige Leiterschleife . . . 58
11.3 Gegeninduktivität - Linienleiter und dreieckförmige Leiterschleife . . . 59
11.4 Gegeninduktivität - 2 Linienleiter und quadratische Leiterschleife . . . 60
11.5 Gegeninduktivität - Linienleiter und gleichschenklige dreieckförmige Leiterschleife . . . 61
11.6 Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters . . . 61
11.7 Magnetfeld eines stromdurchflossenen Koaxialleiters . . . 62

12 Magnetostatik - Gesetz von Biot-Savart 63
12.1 Stromfaden aus drei Segmenten . . . 63
12.2 Geteilter Stromfaden . . . 64
12.3 Kreisförmige Leiterschleife . . . 65
12.4 Rechteckige Leiterschleife . . . 65
12.5 Sehr lange dünne Leiterbahn . . . 66
12.6 Zylinderspule mit n Windungen . . . 67
12.7 Helmholtzspule . . . 68
12.8 Gleichseitiges n-Eck . . . 69
12.9 Halbkreisförmige Leiterschleife . . . 71

13 Quasimagnetostatik - Diffusionsgleichung und Skineffekt 72
13.1 Rechteckiger Leiter zwischen zwei hochpermeablen Ebenen 72
13.2 Leiter in der Nut eines hochpermeablen Körpers 75
13.3 Zwei rechteckige Leiter in der Nut eines hochpermeablen Körpers 76
13.4 Langer flacher Stahlstrang im magnetischen Wechselfeld 78
13.5 Langer Leiter im (parallelen) magnetischen Wechselfeld 79
13.6 Langer Leiter mit niederfrequentem Wechselstrom 80

14 Ebene Wellen 81
14.1 Beschreibung ebener Wellen 81
14.2 Polarisationsarten ebener Wellen 83
14.3 Elektrische Feldstärke und magnetische Flussdichte einer ebenen Welle 85
14.4 Ausbreitungsgeschwindigkeit und Wellenwiderstand einer ebenen Welle 86
14.5 Zwei zirkular polarisierte Wellen 87
14.6 Ebene Wellen in komplexer Darstellung 88
14.7 Überlagerung zweier ebener Wellen 89
14.8 Ebene Welle an einer dielektrischen Grenzschicht 90
14.9 Reflexion an einem Dielektrikum über einer leitenden Ebene 91
14.10TE-Wellen im Rechteckhohlleiter 94

15 Feld von Linearantennen 99
15.1 Anordnung mit einer Linearantenne 101
15.2 Anordnung mit zwei Linearantennen 101
15.3 Kreisförmige Linearantenne 102
15.4 Zwei parallele Linearantennen 102

16 Leitungstheorie der Zweidrahtleitung 103
16.1 Ersatzschaltbild und Leitungsgleichungen der Zweidrahtleitung 103
16.2 Eingangsimpedanz und Reflexionsfaktor der verlustlosen Zweidrahtleitung 105
16.3 Reflexionsfaktor einer induktiv abgeschlossenen Zweidrahtleitung 107
16.4 Verlustlose Leitung mit Parallelwiderstand 108
16.5 Wellenwiderstand einer verlustlosen Zweidrahtleitung 109
16.6 Wellenwiderstand einer verlustlosen Koaxialleitung 113

A Formelsammlung 114

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Metrische Faktoren

Für die metrischen Faktoren h_i und die Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ sowie für das vektorielle Wegelement $\mathrm{d}\vec{r}$, die Flächenelemente $\mathrm{d}\vec{A}_i$ und das Volumenelement $\mathrm{d}V$ gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} h_i &= \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}\right| \qquad\qquad \vec{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i} \\ \mathrm{d}\vec{r} &= \sum_i \mathrm{d}u_i h_i \vec{e}_i = \mathrm{d}u_1 h_1 \vec{e}_1 + \mathrm{d}u_2 h_2 \vec{e}_2 + \mathrm{d}u_3 h_3 \vec{e}_3 \\ \mathrm{d}\vec{A}_i &= \prod_{j\neq i} \mathrm{d}u_j h_j \vec{e}_i \qquad\qquad \text{z.B. für } i=1 \qquad \mathrm{d}\vec{A}_1 = \mathrm{d}u_2 h_2 \mathrm{d}u_3 h_3 \vec{e}_1 \\ \mathrm{d}V &= \prod_i \mathrm{d}u_i h_i = \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 h_1 h_2 h_3 \end{aligned}$$

In Zylinderkoordinaten ist dann der Ortsvektor $\vec{r}$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{mit } u_1 = \varrho \text{ , } u_2 = \varphi \text{ und } u_3 = z$$

sind die metrischen Faktoren

$$\begin{aligned} h_1 = h_\varrho &= \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varrho}\right| = \left|\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1 \\ h_2 = h_\varphi &= \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\varrho\sin\varphi \\ \varrho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\varrho^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)} = \varrho \\ h_3 = h_z &= \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 1 \end{aligned}$$

lauten die Basisvektoren

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 = \vec{e}_\varrho &= \frac{1}{h_\varrho}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varrho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi &= \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \frac{1}{\varrho}\begin{pmatrix} -\varrho\sin\varphi \\ \varrho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_3 = \vec{e}_z &= \frac{1}{h_z}\frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und gilt für das Wegelement, die Flächenelemente sowie das Volumenelement

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\varrho\vec{e}_\varrho + \varrho\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi + \mathrm{d}z\vec{e}_z$$

$$\mathrm{d}\vec{A}_\varrho = \varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\ \vec{e}_\varrho \qquad \mathrm{d}\vec{A}_\varphi = \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}z\ \vec{e}_\varphi \qquad \mathrm{d}\vec{A}_z = \varrho\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\ \vec{e}_z$$

$$\mathrm{d}V = \varrho\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

Analog berechnet man in Kugelkoordinaten den Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad \text{mit } u_1 = r \text{ , } u_2 = \vartheta \text{ und } u_3 = \varphi$$

die metrischen Faktoren

$$\begin{aligned} h_1 = h_r &= \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| = \left|\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\sin^2\vartheta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \cos^2\vartheta} = 1 \\ h_2 = h_\vartheta &= \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}\right| = \left|\begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ -r\sin\vartheta \end{pmatrix}\right| = \sqrt{r^2\cos^2\vartheta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + r^2\sin^2\vartheta} = r \\ h_3 = h_\varphi &= \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| = \left|\begin{pmatrix} -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{r^2\sin^2\vartheta\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)} = r\sin\vartheta \end{aligned}$$

die sphärischen Basisvektoren

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 = \vec{e}_r &= \frac{1}{h_r}\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \\ \vec{e}_2 = \vec{e}_\vartheta &= \frac{1}{h_\vartheta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ -r\sin\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \\ \vec{e}_3 = \vec{e}_\varphi &= \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\begin{pmatrix} -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie Wegelement, Flächenelemente und das Volumenelement

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{r} &= \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\vartheta\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi \\ \mathrm{d}\vec{A}_r &= r^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi\ \vec{e}_r \qquad \mathrm{d}\vec{A}_\vartheta = r\sin\vartheta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\ \vec{e}_\vartheta \qquad \mathrm{d}\vec{A}_\varphi = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\ \vec{e}_\varphi \\ \mathrm{d}V &= r^2\sin\vartheta\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für die Weg-, Flächen- und Volumenelemente der im Aufgabenheft abgebildeten Geometrien (von oben nach unten sowie von links nach rechts):

(kartesisches) Flächenelement	$\mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \vec{e}_z$
(kartesisches) Volumenelement	$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
Wegelement (Polarkoordinaten)	$\mathrm{d}\vec{r} = \varrho\mathrm{d}\varphi\ \vec{e}_\varphi$
Flächenelement (Polarkoordinaten)	$\mathrm{d}\vec{A} = \varrho\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\ \vec{e}_z$
Flächenelement (Zylinderkoordinaten)	$\mathrm{d}\vec{A} = \varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\ \vec{e}_\varrho$
Volumenelement (Kugelkoordinaten)	$\mathrm{d}V = r^2\sin\vartheta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta$
Flächenelement (Kugelkoordinaten)	$\mathrm{d}\vec{A} = r^2\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta\ \vec{e}_r$

1.2 Koordinatentransformation für eine Vektorfunktion

Eine Transformation der gegebenen Vektorfunktion

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2+y^2}\left(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y\right) \qquad \text{mit } |\vec{r}| \neq 0$$

erreicht man durch Einführung von Zylinderkoordinaten mit $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$ und $z = z$. Ortsvektor und Basisvektoren lauten damit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos\varphi\vec{e}_\varrho - \sin\varphi\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y &= \sin\varphi\vec{e}_\varrho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \end{aligned}$$

sodass für die Funktion schließlich folgt

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= \frac{\left(-\varrho\sin\varphi\left(\cos\varphi\vec{e}_\varrho - \sin\varphi\vec{e}_\varphi\right) + \varrho\cos\varphi\left(\sin\varphi\vec{e}_\varrho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi\right)\right)}{\varrho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} \\ &= \frac{\varrho\big(-\sin\varphi\cos\varphi\vec{e}_\varrho + \sin^2\varphi\vec{e}_\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\vec{e}_\varrho + \cos^2\varphi\vec{e}_\varphi\big)}{\varrho^2} \\ &= \frac{\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\vec{e}_\varphi}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}\,\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

1.3 Wegintegral einer Vektorfunktion

Die Vektorfunktion $\vec{F}(\vec{r})$ sowie die orientierten Wege W_1 und W_2 sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\vec{F}(\vec{r}) &= y\vec{e}_x - x\vec{e}_y + (x+y+z)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ x+y+z \end{pmatrix} \\
W_1: \qquad \vec{r}(t) &= \vec{e}_x + t\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad t \in [0;1] \\
W_2: \qquad \vec{r}(t) &= \cos(t)\vec{e}_x + \sin(t)\vec{e}_y + \frac{t}{2\pi}\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{t}{2\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad t \in [0;2\pi]
\end{aligned}$$

Das differentielle Wegelement $\mathrm{d}\vec{r}$ entlang des Weges W_1 bestimmt man zunächst aus der Ableitung des entsprechenden Ortsvektors $\vec{r}$ nach dem Parameter t und anschließendem Umstellen. Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in die jeweiligen Wegintegrale liefert dann

$$\begin{aligned}
\int\limits_{W_1} \vec{F}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r} &= \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1+0+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 (1+t)\mathrm{d}t = \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
\int\limits_{W_1} \vec{F}(\vec{r}) \times \mathrm{d}\vec{r} &= \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1+0+t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \left[\begin{pmatrix} -t \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \right]_0^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{e}_x
\end{aligned}$$

Für den Weg W_2 folgt das vektorielle Wegelement hingegen aus

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \frac{1}{2\pi} \end{pmatrix}$$

Die beiden Wegintegrale berechnet man damit unter Beachtung der Integrationsgrenzen zu

$$\begin{aligned}
\int\limits_{W_2} \vec{F}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r} &= \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) + \frac{t}{2\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \frac{1}{2\pi} \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \left(-\big(\sin^2(t) + \cos^2(t)\big) + \frac{1}{2\pi}\big(\cos(t) + \sin(t)\big) + \frac{t}{(2\pi)^2} \right) \mathrm{d}t \\
&= \left[-t + \frac{1}{2\pi}\big(\sin(t) + \cos(t)\big) + \frac{t^2}{2(2\pi)^2} \right]_0^{2\pi} = \ldots = \frac{1}{2} - 2\pi \\
\int\limits_{W_2} \vec{F}(\vec{r}) \times \mathrm{d}\vec{r} &= \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) + \frac{t}{2\pi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \frac{1}{2\pi} \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos(t)\left[\frac{1+t}{2\pi} + \cos(t) + \sin(t)\right] \\ -\sin(t)\left[\frac{1+t}{2\pi} + \cos(t) + \sin(t)\right] \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \ldots = \begin{pmatrix} -\pi \\ 1-\pi \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

1.4 Differentialoperatoren - Definition, Rechengesetze und Spezialfälle

Für die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz, Rotation sowie den LAPLACE-Operator gelten folgende Darstellungen in kartesischen, Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten (hierbei sei $\Phi(\vec{r})$ ein Skalarfeld und $\vec{F}(\vec{r})$ ein Vektorfeld):

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\Phi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z \\
&= \frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}\vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z \\
&= \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\
&= \frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho F_\varrho)}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta F_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}) &= \vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z \\
&= \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\varrho + \left(\frac{\partial F_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\varrho}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho F_\varphi)}{\partial\varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial F_\varrho}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z \\
&= \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial(\sin\vartheta F_\varphi)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\vartheta}\right)\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\triangle\Phi(\vec{r}) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}\Phi) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \\
&= \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}
\end{aligned}$$

Die Rechenregeln für den Gradienten lauten

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(c\Phi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(c\Phi)}{\partial x} \\ \frac{\partial(c\Phi)}{\partial y} \\ \frac{\partial(c\Phi)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ c\frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ c\frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} = c \operatorname{grad}\Phi \\
\operatorname{grad}(\Phi_1+\Phi_2) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(\Phi_1+\Phi_2)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\Phi_1+\Phi_2)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\Phi_1+\Phi_2)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \operatorname{grad}\Phi_1 + \operatorname{grad}\Phi_2 \\
\operatorname{grad}(\Phi_1\cdot\Phi_2) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(\Phi_1\Phi_2)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\Phi_1\Phi_2)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\Phi_1\Phi_2)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\cdot\Phi_2 \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\cdot\Phi_2 \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\cdot\Phi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi_1\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} \\ \Phi_1\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} \\ \Phi_1\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \Phi_2\operatorname{grad}\Phi_1 + \Phi_1\operatorname{grad}\Phi_2
\end{aligned}$$

Als Rechenregeln für die Divergenz ergeben sich

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(c\vec{F}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cF_x \\ cF_y \\ cF_z \end{pmatrix} = c\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) = c\operatorname{div}\vec{F} \\
\operatorname{div}\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{1x}+F_{2x} \\ F_{1y}+F_{2y} \\ F_{1z}+F_{2z} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial F_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial F_{1z}}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial F_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial F_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial F_{2z}}{\partial z}\right) \\
&= \operatorname{div}\vec{F}_1 + \operatorname{div}\vec{F}_2 \\
\operatorname{div}\left(\Phi\vec{F}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi F_x \\ \Phi F_y \\ \Phi F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}F_x + \Phi\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}F_y + \Phi\frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}F_z + \Phi\frac{\partial F_z}{\partial z} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} + \Phi\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) = \operatorname{grad}\Phi\cdot\vec{F} + \Phi\operatorname{div}\vec{F} \\
\operatorname{div}\left(\vec{F}_1\times\vec{F}_2\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{1y}F_{2z} - F_{1z}F_{2y} \\ F_{1z}F_{2x} - F_{1x}F_{2z} \\ F_{1x}F_{2y} - F_{1y}F_{2x} \end{pmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial F_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial F_{1y}}{\partial z}\right]F_{2x} + \left[\frac{\partial F_{1x}}{\partial z} - \frac{\partial F_{1z}}{\partial x}\right]F_{2y} + \left[\frac{\partial F_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{1x}}{\partial y}\right]F_{2z} \\
&\quad + \left[\frac{\partial F_{2y}}{\partial z} - \frac{\partial F_{2z}}{\partial y}\right]F_{1x} + \left[\frac{\partial F_{2z}}{\partial x} - \frac{\partial F_{2x}}{\partial z}\right]F_{1y} + \left[\frac{\partial F_{2x}}{\partial y} - \frac{\partial F_{2y}}{\partial x}\right]F_{1z} \\
&= \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix} - \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix} \\
&= \vec{F}_2\operatorname{rot}\vec{F}_1 - \vec{F}_1\operatorname{rot}\vec{F}_2
\end{aligned}$$

Für die Rotation gelten schließlich die Rechenregeln wie folgt

$$\operatorname{rot}\left(c\vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ cF_x & cF_y & cF_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} c\frac{\partial F_z}{\partial y} - c\frac{\partial F_y}{\partial z} \\ c\frac{\partial F_x}{\partial z} - c\frac{\partial F_z}{\partial x} \\ c\frac{\partial F_y}{\partial x} - c\frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = c\operatorname{rot}\vec{F}$$

$$\operatorname{rot}\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_{1x}+F_{2x} & F_{1y}+F_{2y} & F_{1z}+F_{2z} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial F_{1y}}{\partial z} \\ \frac{\partial F_{1x}}{\partial z} - \frac{\partial F_{1z}}{\partial x} \\ \frac{\partial F_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{1x}}{\partial y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{2z}}{\partial y} - \frac{\partial F_{2y}}{\partial z} \\ \frac{\partial F_{2x}}{\partial z} - \frac{\partial F_{2z}}{\partial x} \\ \frac{\partial F_{2y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{2x}}{\partial y} \end{pmatrix} = \operatorname{rot}\vec{F}_1 + \operatorname{rot}\vec{F}_2$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\left(\Phi\vec{F}\right) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Phi F_x & \Phi F_y & \Phi F_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial y}F_z + \Phi\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}F_y - \Phi\frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}F_x + \Phi\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}F_z - \Phi\frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}F_y + \Phi\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}F_x - \Phi\frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial y}F_z - \frac{\partial\Phi}{\partial z}F_y \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}F_x - \frac{\partial\Phi}{\partial x}F_z \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}F_y - \frac{\partial\Phi}{\partial y}F_x \end{pmatrix} + \Phi\begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \operatorname{grad}\Phi\times\vec{F} + \Phi\operatorname{rot}\vec{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\left(\vec{F}_1\times\vec{F}_2\right) &= \operatorname{rot}\begin{pmatrix} F_{1y}F_{2z}-F_{1z}F_{2y} \\ F_{1z}F_{2x}-F_{1x}F_{2z} \\ F_{1x}F_{2y}-F_{1y}F_{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{pmatrix}\left(\frac{\partial F_{2x}}{\partial x}+\frac{\partial F_{2y}}{\partial y}+\frac{\partial F_{2z}}{\partial z}\right) - \left[\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{pmatrix} \\ &\quad + \left[\begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{pmatrix}\left(\frac{\partial F_{1x}}{\partial x}+\frac{\partial F_{1y}}{\partial y}+\frac{\partial F_{1z}}{\partial z}\right) \\ &= \vec{F}_1\left(\operatorname{div}\vec{F}_2\right) - \left(\vec{F}_1\vec{\nabla}\right)\vec{F}_2 + \left(\vec{F}_2\vec{\nabla}\right)\vec{F}_1 - \vec{F}_2\left(\operatorname{div}\vec{F}_1\right) \end{aligned}$$

Bei wiederholter Anwendung der Differentialoperatoren sind folgende Rechenregeln zu beachten

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\Phi) = \operatorname{div}\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \triangle\Phi$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\Phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 F_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_y}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 F_z}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 F_x}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_y}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 F_x}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 F_x}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y\partial z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 F_x}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 F_x}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{F}\right) - \triangle\vec{F} \end{aligned}$$

Spezialfälle der Anwendung der Vektor-Differentialoperatoren sind

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} r &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{2x}{2\sqrt{\cdots}}\vec{e}_x + \frac{2y}{2\sqrt{\cdots}}\vec{e}_y + \frac{2z}{2\sqrt{\cdots}}\vec{e}_z = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{r} \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(r)\vec{e}_r = \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\frac{1}{r} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{2x}{2\sqrt{\cdots}^3}\vec{e}_x - \frac{2y}{2\sqrt{\cdots}^3}\vec{e}_y - \frac{2z}{2\sqrt{\cdots}^3}\vec{e}_z = -\frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{e}_r = -\frac{1}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{\vec{r}}{r^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{r} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot r\right) = \frac{3r^2}{r^2} = 3
\end{aligned}$$

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = \underbrace{\operatorname{div}\vec{r}}_{=3} \cdot \frac{1}{r^3} + \vec{r}\cdot \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{3}{r^3} + \vec{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\right)\vec{e}_r = \frac{3}{r^3} - \vec{r}\frac{3}{r^4}\vec{e}_r = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0$$

$$\begin{aligned}
\triangle(\ln r) &= \operatorname{div}\big(\operatorname{grad}(\ln r)\big) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial}{\partial r}(\ln r)\vec{e}_r\right) = \operatorname{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r}\right) = \operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right) \\
&= \underbrace{\operatorname{div}\vec{r}}_{=3} \cdot \frac{1}{r^2} + \vec{r}\cdot \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{3}{r^2} + \vec{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right)\vec{e}_r = \frac{3}{r^2} - \vec{r}\frac{2}{r^3}\vec{e}_r = \frac{3}{r^2} - \frac{2}{r^2} = \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

$$\operatorname{rot}\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\vec{c}\times\vec{r}) &= \operatorname{rot}\begin{pmatrix} c_y z - c_z y \\ c_z x - c_x z \\ c_x y - c_y x \end{pmatrix} = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_x - (-c_x) \\ c_y - (-c_y) \\ c_z - (-c_z) \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = 2\vec{c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(f(r)\vec{r}) &= \operatorname{grad} f(r)\times\vec{r} + f(r)\cdot\underbrace{\operatorname{rot}\vec{r}}_{=\vec{0}} = \frac{\partial}{\partial r}\big(f(r)\big)\vec{e}_r\times\vec{r} \\
&= f'(r)\vec{e}_r\times(r\vec{e}_r) = \vec{0} \qquad (\text{da } \vec{e}_r\times\vec{e}_r = \vec{0})
\end{aligned}$$

1.5 Oberflächenintegral einer Vektorfunktion

Gegeben ist ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ durch

$$\vec{F}(\vec{r}) = x^2\vec{e}_x + y^2\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$$

Das Integral über die Oberfläche des Einheitswürfels berechnet sich unter Nutzung des Gaussschen Integralsatzes gemäß

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{F}(\vec{r}) &= \vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}x^2 + \frac{\partial}{\partial y}y^2 + \frac{\partial}{\partial z}z^2 = 2(x+y+z) \\ \oiint_{\partial V}\vec{F}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{A} &= \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}(\vec{r})\mathrm{d}V = 2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 2\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{2}+y+z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^1(1+z)\mathrm{d}z = 2\left[\frac{z^2}{2}+z\right]_0^1 = 3 \end{aligned}$$

1.6 Berechnung der Skalarfunktion einer Vektorfunktion 1

Damit das Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = (x+2y+az)\vec{e}_x + (bx-3y-z)\vec{e}_y + (4x+cy+2z)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x+2y+az \\ bx-3y-z \\ 4x+cy+2z \end{pmatrix}$$

wirbelfrei ist, muss die Rotation

$$\operatorname{rot}\vec{V}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} V_{3y}-V_{2z} \\ V_{1z}-V_{3x} \\ V_{2x}-V_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+1 \\ a-4 \\ b-2 \end{pmatrix}$$

verschwinden. Dies ist der Fall, wenn die Konstanten $\underline{a=4,\ b=2 \text{ und } c=-1}$ sind. Die zugehörige Skalarfunktion $\Phi(\vec{r})$ bestimmt sich nun aus dem Gradienten

$$\operatorname{grad}\Phi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \vec{V}(\vec{r})$$

wie folgt

$$\begin{aligned} \Phi_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= x+2y+4z \quad\Rightarrow\quad \Phi(x,y,z) = \int\Phi_x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 2(y+2z)x + C_1(y,z) \\ \Phi_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= 2x + C_1'(y,z) \stackrel{!}{=} 2x-3y-z \quad\Rightarrow\quad C_1(y,z) = \int C_1'(y,z)\mathrm{d}y = -\frac{3}{2}y^2 - zy + C_2(z) \\ \Phi_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= 4x - y + C_2'(z) \stackrel{!}{=} 4x-y+2z \quad\Rightarrow\quad C_2(z) = \int C_2'(z)\mathrm{d}z = z^2 + K \\ \Phi(x,y,z) &= \underline{\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 + z^2 + 2xy + 4xz - yz + K} \qquad \text{mit } K\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

1.7 Berechnung der Skalarfunktion einer Vektorfunktion 2

Das gegebene Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = (2xy^3z^4 + 2)\vec{e}_x + (3x^2y^2z^4)\vec{e}_y + (4x^2y^3z^3)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 2xy^3z^4 + 2 \\ 3x^2y^2z^4 \\ 4x^2y^3z^3 \end{pmatrix}$$

ist ein Potentialfeld genau dann, wenn es wirbelfrei ist, d.h. wenn die Rotation

$$\operatorname{rot}\vec{V}(\vec{r}) \;=\; \vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} V_{3y} - V_{2z} \\ V_{1z} - V_{3x} \\ V_{2x} - V_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2y^2z^3 - 12x^2y^2z^3 \\ 8xy^3z^3 - 8xy^3z^3 \\ 6xy^2z^4 - 6xy^2z^4 \end{pmatrix}$$

verschwindet. Die Berechnung des Potentials erfolgt analog zu Aufgabe 1.6. Das Vektorfeld ist wiederum über dessen Gradienten

$$\operatorname{grad}\Phi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \vec{V}(\vec{r})$$

definiert. Konkret erhält man hieraus nun

$$\begin{aligned}
\Phi_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= 2xy^3z^4 + 2 \quad\Rightarrow\quad \Phi(x,y,z) = \int \Phi_x \mathrm{d}x = x^2y^3z^4 + 2x + C_1(y,z) \\
\Phi_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= 3x^2y^2z^4 + C_1'(y,z) \stackrel{!}{=} 3x^2y^2z^4 \quad\Rightarrow\quad C_1(y,z) = \int C_1'(y,z)\mathrm{d}y = 0 + C_2(z) \\
\Phi_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= 4x^2y^3z^3 + C_2'(z) \stackrel{!}{=} 4x^2y^3z^3 \quad\Rightarrow\quad C_2(z) = \int C_2'(z)\mathrm{d}z = 0 + K \\
\\
\Phi(x,y,z) &= x^2y^3z^4 + 2x + K \qquad \text{mit } K \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Mit der zusätzlichen Bedingung, dass $\Phi_0 = \Phi(0,0,0) = 0$ gelten soll, folgt $K = 0$ und damit

$$\Phi(x,y,z) = x^2y^3z^4 + 2x$$

1.8 Anwendung des Laplace-Operators

Die Skalarfunktion

$$\Phi(\vec{r}) = \cos(mx)\cos(ny)\mathrm{e}^{-\sqrt{m^2+n^2}z}$$

erfüllt die Laplace-Gleichung, da für ihre jeweiligen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\Phi_x &= -m\sin(mx)\cos(ny)\mathrm{e}^{-\sqrt{m^2+n^2}z} \\
\Phi_{xx} &= -m^2\cos(mx)\cos(ny)\mathrm{e}^{-\sqrt{m^2+n^2}z} = -m^2\Phi \\
\\
\Phi_y &= -n\cos(mx)\sin(ny)\mathrm{e}^{-\sqrt{m^2+n^2}z} \\
\Phi_{yy} &= -n^2\cos(mx)\cos(ny)\mathrm{e}^{-\sqrt{m^2+n^2}z} = -n^2\Phi \\
\\
\Phi_z &= -\sqrt{m^2+n^2}\cos(mx)\cos(ny)\mathrm{e}^{-\sqrt{m^2+n^2}z} \\
\Phi_{zz} &= \left(m^2+n^2\right)\cos(mx)\cos(ny)\mathrm{e}^{-\sqrt{m^2+n^2}z} = \left(m^2+n^2\right)\Phi
\end{aligned}$$

gilt und damit insgesamt folgt

$$\triangle\,\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r})_{xx} + \Phi(\vec{r})_{yy} + \Phi(\vec{r})_{zz} = \left(-m^2 - n^2 + m^2 + n^2\right)\Phi(\vec{r}) = 0$$

1.9 Prüfen auf Quellen und Wirbel

Für die Vektorfunktionen $\vec{F}_1(\vec{r})$ und $\vec{F}_2(\vec{r})$, gegeben durch

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = cr\vec{e}_r = c\vec{r} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{F}_2(\vec{r}) = cr\cos\vartheta\vec{e}_r = F_r\vec{e}_r \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{F}_1(\vec{r}) &= \operatorname{div}(c\vec{r}) = c\underbrace{\operatorname{div}\vec{r}}_{=3} = 3c \neq 0 \\ \operatorname{rot}\vec{F}_1(\vec{r}) &= \operatorname{rot}(c\vec{r}) = c\underbrace{\operatorname{rot}\vec{r}}_{=\vec{0}} = \vec{0} \end{aligned}$$

womit gezeigt ist, dass $\vec{F}_1$ keine Quellen und keine Wirbel aufweist. Zur Berechnung von Divergenz und Rotation der Funktion $\vec{F}_2$ nutzt man zweckmäßigerweise die Darstellung der Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten und erhält mit

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{F}_2(\vec{r}) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2F_r\right)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(cr^3\cos\vartheta\right)}{\partial r} = 3c\cos\vartheta \neq 0 \quad \text{für} \quad \vartheta \neq \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{rot}\vec{F}_2(\vec{r}) &= \frac{1}{r}\left(-\frac{\partial}{\partial\vartheta}(cr\cos\vartheta)\right)\vec{e}_\varphi = c\sin\vartheta\vec{e}_\varphi \neq \vec{0} \end{aligned}$$

die Aussage, dass diese weder quellen- noch wirbelfrei ist.

1.10 Quellenfreies Wirbelfeld und wirbelfreies konservatives Vektorfeld

Ein Wirbelfeld $\vec{W}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r})$ ist stets quellenfrei, denn es gilt

$$\operatorname{div}\vec{W}(\vec{r}) = \operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r})\right) = 0$$

Ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$, welches sich als Gradient einer skalaren Funktion Φ darstellen lässt (d.h. ein konservatives Vektorfeld), ist stets wirbelfrei, da gilt

$$\vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{grad}\Phi \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\Phi) = \vec{0}$$

2 Maxwell-Gleichungen und abgeleitete Gleichungen

2.1 Maxwell-Gleichungen in Differentialform

Die MAXWELL-Gleichungen lauten in Differentialform

$$\operatorname{div}\vec{D} = \varrho \qquad \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0$$
$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \vec{J}$$

Zusammen mit den Materialgleichungen

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} &&= \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\vec{E}\\ \vec{B} &= \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) &&= \mu_0\mu_\mathrm{r}\vec{H}\\ \vec{J} &= \kappa\vec{E}\end{aligned}$$

beschreiben sie das Verhalten elektrischer und magnetischer Felder in Materie. Für homogene, isotrope, lineare Medien (d.h. $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}$ und $\mu = \mu_0\mu_\mathrm{r}$ sind räumlich konstante, skalare Größen und nicht vom Betrag der Feldgrößen abhängig) folgt nun

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{D} &= \operatorname{div}\left(\varepsilon\vec{E}\right) = \varepsilon\operatorname{div}\vec{E} = \varrho \qquad \rightarrow \qquad \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon}\\ \operatorname{div}\vec{B} &= \operatorname{div}\left(\mu\vec{H}\right) = \mu\operatorname{div}\vec{H} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \operatorname{div}\vec{H} = 0\\ \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\vec{H}\right) = \operatorname{rot}\vec{E} + \mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\\ \operatorname{rot}\vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \kappa\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\vec{E}\right) = \kappa\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

2.2 Überführung der Maxwell-Gleichungen von Differential- in Integralform

Für die Umformung der MAXWELLschen Gleichungen von Differential- in Integralform werden die Integralsätze von GAUSS und STOKES benötigt. Sie lauten

$$\oiint_{\partial V}\vec{F}\mathrm{d}\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\mathrm{d}V \qquad \oint_{\partial A}\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \iint_A \operatorname{rot}\vec{F}\mathrm{d}\vec{A}$$

Damit schreibt man nun

$$\operatorname{div}\vec{D} = \varrho_\mathrm{V} \qquad \iiint_V \operatorname{div}\vec{D}\mathrm{d}V = \oiint_{\partial V}\vec{D}\mathrm{d}\vec{A} = \iiint_V \varrho_\mathrm{V}\mathrm{d}V = Q$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \iiint_V \operatorname{div}\vec{B}\mathrm{d}V = \oiint_{\partial V}\vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = \iiint_V 0\mathrm{d}V = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \iint_A \operatorname{rot}\vec{E}\mathrm{d}\vec{A} + \iint_A \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{A} = \iint_A 0\mathrm{d}\vec{A} = 0$$

$$\oint_{\partial A}\vec{E}\mathrm{d}\vec{r} = -\iint_A \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{A}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \qquad \iint_A \operatorname{rot}\vec{H}\mathrm{d}\vec{A} - \iint_A \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{A} = \iint_A \vec{J}\mathrm{d}\vec{A}$$

$$\oint_{\partial A}\vec{H}\mathrm{d}\vec{r} = \iint_A \vec{J}\mathrm{d}\vec{A} + \iint_A \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{A}$$

2.3 Poisson-Gleichung für homogenes dielektrisches Medium

Bei Betrachtung des elektrostatischen Feldes ist die zeitliche Ableitung in der betreffenden MAXWELL-Gleichung Null und es folgt die Wirbelfreiheit von $\vec{E}$. Damit ist dieses ein konservatives Vektorfeld und als Gradient eines Potentialfeldes Φ darstellbar. Es gilt

$$\operatorname{rot}\vec{E} + \underbrace{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{=0} = \operatorname{rot}\vec{E} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi$$

In einem isotropen, linearen und homogenen Dielektrikum ist die Permittivität $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ wegen der Isotropie ein Skalar (d.h. sie wird nicht von der Richtung des Feldes bestimmt), aufgrund der Homogenität räumlich konstant (also $\varepsilon \neq \varepsilon(\vec{r})$) und infolge der Linearität auch nicht selbst vom Betrag der Feldstärke abhängig ($\varepsilon \neq \varepsilon(\vec{E})$), sodass man weiterhin schreiben kann

$$\operatorname{div}\vec{D}(\vec{r}) = \operatorname{div}\left(\varepsilon\vec{E}(\vec{r})\right) = \varepsilon \operatorname{div}(-\operatorname{grad}\Phi(\vec{r})) = -\varepsilon \triangle \Phi(\vec{r}) = \varrho \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\triangle \Phi(\vec{r}) = -\frac{\varrho}{\varepsilon}}$$

2.4 Poisson-Gleichung für homogenes permeables Medium

Im Falle eines in einem Medium fließenden Gleichstromes, d.h. mit konstanter Stromdichte $\vec{J} = \kappa\vec{E}$, ist die zeitliche Ableitung des elektrischen Verschiebungsfeldes Null. Für die magnetische Induktion führt man nun ein Vektorpotential $\vec{A}$ ein, für das gelten soll

$$\text{(i)} \qquad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \qquad\qquad\qquad \text{(ii)} \qquad \operatorname{div}\vec{A} = 0$$

Die zweite Bedingung wird dabei als sogenannte COULOMB-Eichung bezeichnet und ist notwendig, da das Vektorpotential durch (i) nicht eindeutig bestimmt ist und man beispielsweise schreiben kann

$$\text{mit } \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}\chi \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{rot}\vec{A}' = \operatorname{rot}\vec{A} + \underbrace{\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\chi)}_{=0} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

Damit leitet sich die POISSON-Gleichung des magnetischen Vektorpotentials aus den MAXWELLschen Gleichungen wie folgt ab

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right) = \frac{1}{\mu}\left[\operatorname{grad}\underbrace{\left(\operatorname{div}\vec{A}\right)}_{=0} - \triangle\vec{A}\right] &= \vec{J} + \underbrace{\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}_{=0} \\ -\frac{1}{\mu}\triangle\vec{A} &= \vec{J} \\ \triangle\vec{A} &= -\mu\vec{J} \end{aligned}$$

2.5 Poisson-Gleichung für inhomogenes dielektrisches Medium

Analog zu Aufgabe 2.3 berechnet man für ein inhomogenes Dielektrikum (mit ortsabhängiger Permittivität $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$)

$$\operatorname{div}\vec{D}(\vec{r}) = \operatorname{div}\left(\varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\right) = \underline{-\operatorname{grad}\varepsilon(\vec{r})\cdot\operatorname{grad}\Phi(\vec{r}) - \varepsilon(\vec{r})\cdot\triangle\Phi(\vec{r}) = \varrho}$$

2.6 Entkoppelung der Maxwell-Gleichungen

Ausgehend von den MAXWELL-Gleichungen in Differentialform wie in Aufgabe 2.1 und unter Anwendung der Beziehung $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{A}) - \triangle\vec{A}$ berechnet man für das magnetische Feld

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\vec{H}\right) = \operatorname{grad}\underbrace{\left(\operatorname{div}\vec{H}\right)}_{=0} - \triangle\vec{H} &= \operatorname{rot}\left[\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\right] = \operatorname{rot}\left(\kappa\vec{E}\right) + \operatorname{rot}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\vec{E}\right) \\
-\triangle\vec{H} &= \kappa\operatorname{rot}\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{E} = \kappa\left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) \\
\triangle\vec{H} &= \kappa\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} \\
\frac{1}{\varepsilon\mu}\triangle\vec{H} &= \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} + \frac{\kappa}{\varepsilon}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}
\end{aligned}$$

und gleichermaßen für das elektrische Feld

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\vec{E}\right) = \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{E}\right) - \triangle\vec{E} &= \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) = -\operatorname{rot}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\vec{H}\right) \\
\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\underbrace{\left(\operatorname{div}\vec{D}\right)}_{=\varrho} - \triangle\vec{E} &= -\mu\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\right)
\end{aligned}$$

mit $\varrho = \text{const.}$ oder $\varrho = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
-\triangle\vec{E} &= -\kappa\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} \\
\frac{1}{\varepsilon\mu}\triangle\vec{E} &= \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\kappa}{\varepsilon}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Wiederum wurde hier genutzt, dass $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}$ und $\mu = \mu_0\mu_\mathrm{r}$ für isotrope Medien skalare Größen darstellen und diese zudem aufgrund der Homogenität im gesamten Medium konstant sind bzw. wegen der Linearität auch keine Abhängigkeit von den Feldgrößen aufweisen. Die Betrachtung erfolgte weiterhin für eine gleichmäßige Ladungsverteilung $\varrho = \text{const.}$ bzw. im ladungsfreien Raum mit der Raumladungsdichte $\varrho = 0$.

2.7 Diffusionsgleichung

Für niederfrequente Vorgänge mit konstanter Kreisfrequenz gilt aufgrund der Beziehung $|\vec{J}| \gg |\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}|$ die quasistatische Näherung $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J}$ (Quasi-Magnetostatik). Weiterhin sind die Materialgrößen ε und μ in einem linearen, isotropen und homogenen Medium skalar, räumlich konstant und nicht selbst von den Feldgrößen abhängig, womit sich schreiben lässt

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\vec{H}\right) = \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{H}\right) - \triangle\vec{H} &= \operatorname{rot}\vec{J} = \operatorname{rot}\left(\kappa\vec{E}\right) = \kappa\operatorname{rot}\vec{E} \\
\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}\underbrace{\left(\operatorname{div}\vec{B}\right)}_{=0} - \triangle\vec{H} &= \kappa\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu\kappa\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\
\triangle\vec{H} &= \mu\kappa\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Unter Verwendung komplexer Zeigergrößen mit $\underline{\vec{H}} = \vec{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ bzw. durch FOURIER-Transformation ergibt sich aus der letzten Gleichung schließlich die Beziehung

$$\triangle\vec{H} = \mathrm{j}\omega\mu\kappa\vec{H}$$

2.8 Wellengleichung (Helmholtzgleichung)

Im Falle zeitharmonischer Vorgänge lassen sich die Feldgrößen in komplexer Form wie folgt darstellen

$$\underline{\vec{D}} = \vec{D}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \underline{\vec{D}} = \varepsilon\underline{\vec{E}} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\underline{\vec{D}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{D}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) = \mathrm{j}\omega\vec{D}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega\underline{\vec{D}}$$

$$\underline{\vec{H}} = \vec{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \underline{\vec{B}} = \mu\underline{\vec{H}} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\underline{\vec{B}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) = \mathrm{j}\omega\vec{B}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega\underline{\vec{B}}$$

Damit vereinfachen sich die zeitlichen Ableitungen in den MAXWELL-Gleichungen und es gilt

$$\operatorname{div}\underline{\vec{D}} = \varrho \qquad \operatorname{rot}\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\vec{B}}$$

$$\operatorname{div}\underline{\vec{B}} = 0 \qquad \operatorname{rot}\underline{\vec{H}} = (\kappa + \mathrm{j}\omega\varepsilon)\underline{\vec{E}}$$

Weiterhin lässt sich für ein isotropes, lineares und homogenes ($\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ und $\mu = \mu_0\mu_r$ sind skalar, räumlich konstant und unabhängig von den Feldgrößen) sowie verlustfreies Medium (mit elektrischer Leitfähigkeit $\kappa = 0$ bzw. $\kappa \ll \omega\varepsilon$) schreiben

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\underline{\vec{H}}\right) = \operatorname{grad}\underbrace{\left(\operatorname{div}\underline{\vec{H}}\right)}_{=0} - \triangle\underline{\vec{H}} &= \operatorname{rot}\left[(\kappa + \mathrm{j}\omega\varepsilon)\underline{\vec{E}}\right] = (\kappa + \mathrm{j}\omega\varepsilon)\operatorname{rot}\underline{\vec{E}} \\
\triangle\underline{\vec{H}} &= (\kappa + \mathrm{j}\omega\varepsilon)\mathrm{j}\omega\mu\underline{\vec{H}} \overset{\kappa=0}{=} -\omega^2\varepsilon\mu\underline{\vec{H}} \\
\Rightarrow \qquad \triangle\underline{\vec{H}} + \omega^2\mu\varepsilon\underline{\vec{H}} &= 0
\end{aligned}$$

2.9 Kontinuitätsgleichung

Ausgehend von den MAXWELL-Gleichungen und mithilfe des Integralsatzes von GAUSS erhält man

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \\
\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H} = 0 &= \operatorname{div}\left[\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\right] = \operatorname{div}\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{D}\right) = \operatorname{div}\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\varrho_{\mathrm{V}} \\
0 &= \iiint_V \operatorname{div}\vec{J}\,\mathrm{d}V + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \varrho_{\mathrm{V}}\,\mathrm{d}V \\
&= \oiint_{\partial V} \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}Q
\end{aligned}$$

Diese als Kontinuitätsgleichung bezeichnete Relation beschreibt den Zusammenhang zwischen der elektrischen Ladung Q und dem elektrischen Strom innerhalb eines Mediums. Konkret besagt sie, dass die Ladungsänderung $\frac{\partial Q}{\partial t}$ in einem abgeschlossenen Volumen einen entsprechenden Ladungsstrom $\vec{J}$ durch die das Volumen umschließende Oberfläche hervorruft. Anders ausgedrückt können Ladungen weder erzeugt noch vernichtet werden. Eine Erhöhung der Ladung innerhalb des Volumens ist stets mit einem hineinfließenden Strom verbunden und umgekehrt.

2.10 Relaxationszeit

Als Relaxation wird der Vorgang zur Herstellung eines Gleichgewichtszustandes bezeichnet, wie er z.B. in einem Medium der Leitfähigkeit κ nach Einbringen einer Ladungsverteilung der Raumladungsdichte ϱ_V abläuft. Die einzelnen Ladungsträger verteilen sich hiernach auf der Oberfläche des Körpers, bis sein Inneres ladungs- und feldfrei ist. Beschreiben lässt sich dies mit der in Aufgabe 2.9 hergeleiteten Kontinuitätsgleichung in differentieller Formulierung

$$\operatorname{div}\vec{J} = -\frac{\partial \varrho_\mathrm{V}}{\partial t}$$

die mithilfe der beiden Materialgleichungen $\vec{J} = \kappa\vec{E}$ und $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ und des GAUSSschen Gesetzes der MAXWELL-Gleichungen unter Annahme eines homogenen, isotropen und linearen Mediums der Permittivität ε weiter umgeformt wird zu

$$\operatorname{div}\vec{J} = \operatorname{div}\left(\kappa\vec{E}\right) = \kappa \operatorname{div}\left(\frac{\vec{D}}{\varepsilon}\right) = \frac{\kappa}{\varepsilon}\underbrace{\operatorname{div}\vec{D}}_{=\varrho_\mathrm{V}} = -\frac{\partial \varrho_\mathrm{V}}{\partial t}$$

Die entstehende Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial \varrho_\mathrm{V}}{\partial t} + \frac{\kappa}{\varepsilon}\varrho_\mathrm{V} = 0$$

löst man beispielsweise mittels Trennung der Variablen und anschließender Integration und erhält

$$\begin{aligned}
\int_{\varrho_\mathrm{V}(0)}^{\varrho_\mathrm{V}(t)} \frac{\mathrm{d}\varrho_\mathrm{V}}{\varrho_\mathrm{V}} &= -\frac{\kappa}{\varepsilon}\int_0^t \mathrm{d}t' \\
\ln\varrho_\mathrm{V}(t) - \ln\underbrace{\varrho_\mathrm{V}(0)}_{=:\varrho_{\mathrm{V}0}} &= -\frac{\kappa}{\varepsilon}t \\
\Rightarrow \qquad \varrho_\mathrm{V}(t) &= \varrho_{\mathrm{V}0}\exp\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon}t\right) = \varrho_{\mathrm{V}0}\exp\left(-\frac{t}{\tau_\mathrm{R}}\right) \qquad \text{mit} \qquad \underline{\tau_\mathrm{R} = \frac{\varepsilon}{\kappa}}
\end{aligned}$$

d.h. der Ladungsausgleich im Medium erfolgt gemäß einer exponentiellen zeitlichen Abhängigkeit. Die hierin vorkommende Zeitkonstante τ_R wird dabei auch Relaxationszeit genannt. Sie besitzt die Einheit $[\tau_\mathrm{R}] = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}\frac{\mathrm{Vm}}{\mathrm{A}} = \mathrm{s}$ und ist jeweils charakteristisch für das entsprechende Material.

3 Elektrostatik - Punktladungen

3.1 Drei Punktladungen

Die von den Ladungen $Q_2 = -Q$ und $Q_3 = Q$ auf die Punktladung $Q_1 = Q$ wirkende Kraft $\vec{F}$ berechnet sich nach dem COULOMB-Gesetz und mithilfe des Superpositionsprinzips gemäß

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{ij} &= \frac{Q_i Q_j}{4\pi\varepsilon}\frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} \qquad \textit{Kraft von } Q_i \textit{ auf } Q_j\textit{, Ladungen am Ort } \vec{r}_i \textit{ bzw. } \vec{r}_j \\
\vec{r}_1 &= \begin{pmatrix}0 & a & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix}-a & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix}a & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \\
\vec{F}_{21} &= \frac{Q_2 Q_1}{4\pi\varepsilon}\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\frac{(a\vec{e}_x + a\vec{e}_y)}{|a\vec{e}_x + a\vec{e}_y|^3} = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\frac{(\vec{e}_x + \vec{e}_y)}{a^2 2\sqrt{2}} \\
\vec{F}_{31} &= \frac{Q_3 Q_1}{4\pi\varepsilon}\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\frac{(-a\vec{e}_x + a\vec{e}_y)}{|-a\vec{e}_x + a\vec{e}_y|^3} = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\frac{(\vec{e}_x - \vec{e}_y)}{a^2 2\sqrt{2}} \\
\vec{F} &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\frac{(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_x - \vec{e}_y)}{a^2 2\sqrt{2}} = \underline{-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon a^2\sqrt{2}}\,\vec{e}_x}
\end{aligned}$$

3.2 Vier Punktladungen

Analog zu Aufgabe 3.1 berechnet man wieder die von den drei Punktladungen Q_0, $Q_1 = -k_1 Q_0$ und $Q_2 = -k_2 Q_0$ auf Q_3 wirkende Kraft zu

$$\begin{aligned}
\vec{r}_3 &= \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \vec{r}_i = \begin{pmatrix}0\\0\\z_i\end{pmatrix} \qquad \vec{r}_{i3} = \begin{pmatrix}x\\y\\z - z_i\end{pmatrix} \\
|\vec{r}_{i3}| &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_i)^2} = r_{i3} \qquad\qquad \text{mit } i = \{0, 1, 2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{i3} &= \frac{Q_i Q_3}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_i}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_i|^3} = \frac{Q_i Q_3}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}_{i3}}{|\vec{r}_{i3}|^3} = \frac{Q_i Q_3}{4\pi\varepsilon}\frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z - z_i)\vec{e}_z}{r_{i3}^3} \\
\vec{F} &= \sum_{i=0}^{2}\vec{F}_{i3} = \frac{Q_0 Q_3}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z - z_0)\vec{e}_z}{r_{03}^3} - k_1\frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z - z_1)\vec{e}_z}{r_{13}^3} - k_2\frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z - z_2)\vec{e}_z}{r_{23}^3}\right]
\end{aligned}$$

Damit die resultierende Kraft $\vec{F}$ verschwindet, müssen alle Komponenten in x-, y- und z-Richtung Null werden. Hieraus erhält man zwei Bedingungen für die Parameter k_1 und k_2 (die Auswertung der x- und y-Komponente liefert identische Ergebnisse)

$$\begin{aligned}
\vec{e}_x, \vec{e}_y: \quad 0 &= x\left(\frac{1}{r_{03}^3} - \frac{k_1}{r_{13}^3} - \frac{k_2}{r_{23}^3}\right) = y\left(\frac{1}{r_{03}^3} - \frac{k_1}{r_{13}^3} - \frac{k_2}{r_{23}^3}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r_{03}^3} = \frac{k_1}{r_{13}^3} + \frac{k_2}{r_{23}^3} \\
\vec{e}_z: \quad 0 &= \underbrace{z\left(\frac{1}{r_{03}^3} - \frac{k_1}{r_{13}^3} - \frac{k_2}{r_{23}^3}\right)}_{=0} - \left(\frac{z_0}{r_{03}^3} - \frac{k_1 z_1}{r_{13}^3} - \frac{k_2 z_2}{r_{23}^3}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{z_0}{r_{03}^3} = \frac{k_1 z_1}{r_{13}^3} + \frac{k_2 z_2}{r_{23}^3}
\end{aligned}$$

Für die Lösung dieses linearen Gleichungssystems nutzt man z.B. die CRAMERsche Regel

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{r_{13}^3} & \frac{1}{r_{23}^3}\\ \frac{z_1}{r_{13}^3} & \frac{z_2}{r_{23}^3}\end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{1}{r_{03}^3}\\ \frac{z_0}{r_{03}^3}\end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{r_{03}^3} & \frac{1}{r_{23}^3}\\ \frac{z_0}{r_{03}^3} & \frac{z_2}{r_{23}^3}\end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{r_{13}^3} & \frac{1}{r_{03}^3}\\ \frac{z_1}{r_{13}^3} & \frac{z_0}{r_{03}^3}\end{pmatrix} \\
\det A &= \frac{z_2 - z_1}{(r_{13} r_{23})^3} \qquad \det A_1 = \frac{z_2 - z_0}{(r_{03} r_{23})^3} \qquad \det A_2 = \frac{z_0 - z_1}{(r_{03} r_{13})^3} \\
\Rightarrow \qquad k_1 &= \underline{\frac{\det A_1}{\det A} = \frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_1}\left(\frac{r_{13}}{r_{03}}\right)^3 \qquad k_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{z_0 - z_1}{z_2 - z_1}\left(\frac{r_{23}}{r_{03}}\right)^3}
\end{aligned}$$

3.3 Bewegen von Ladungen im Potentialfeld

Die mechanische Arbeit zum Bewegen der Ladung $Q_3 = -Q$ im elektrostatischen Feld der beiden Punktladungen $Q_1 = +Q$ und $Q_2 = +Q$ bei $\vec{r}_{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm a \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ist allgemein definiert als das vektorielle Wegintegral der auf Q_3 wirkenden (COULOMBschen) Kraft $\vec{F}$

$$W_{\mathrm{mech}} = -\int_{\vec{r}_3}^{\vec{r}_3'} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} \qquad \text{mit} \qquad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{r}_3' = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}x$$

Die Kraft berechnet man wiederum mittels Superposition zu

$$\vec{F} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{x\vec{e}_x - a\vec{e}_z}{\sqrt{x^2+a^2}^3} + \frac{x\vec{e}_x + a\vec{e}_z}{\sqrt{x^2+a^2}^3}\right] = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\frac{2x\vec{e}_x}{\sqrt{x^2+a^2}^3}$$

Entsprechend ergibt sich die mechanische Energie für die Verschiebung aus dem Ursprung nach P_3 zu

$$W_{\mathrm{mech}} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\int_0^b \frac{2x}{\sqrt{x^2+a^2}^3}\mathrm{d}x \overset{207}{=} \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right]_0^b = \underline{\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}}\right)}$$

und zum Entfernen von Q_3 aus dem Wirkungsbereich der Ladungen Q_1 und Q_2 zu

$$W_{\mathrm{mech}} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{2x}{\sqrt{x^2+a^2}^3}\mathrm{d}x = \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}}\right) = \underline{\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{a}}$$

[207] Integral #207 nach BRONSTEIN, *Taschenbuch der Mathematik*:

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}} \qquad \text{mit} \qquad X = x^2 + a^2$$

4 Elektrostatik - Coulombintegral

4.1 Linienladung 1

Da die Ladung Q_1 über den Bereich $0 \leq z \leq c$ mit der Linienladungsdichte $\lambda = \frac{Q_1}{c}$ gleichmäßig verteilt ist, wird zunächst der Anteil der Kraft $\mathrm{d}\vec{F}$ auf Q_2, hervorgerufen durch das differentielle Ladungselement $\mathrm{d}Q_1 = \lambda \mathrm{d}z'$, betrachtet:

$$\mathrm{d}\vec{F} = \frac{\mathrm{d}Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon c} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \mathrm{d}z'$$

Die Gesamtkraft erhält man anschließend durch Integration über den Bereich der Linienladung. Aufgrund der Zylindersymmetrie des Problems ist hier die Wahl von Zylinderkoordinaten sinnvoll. Mit $\vec{r}_1 = z'\vec{e}_z$ und $\vec{r}_2 = \varrho\vec{e}_\varrho + z\vec{e}_z$ ist dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{F} &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon c} \frac{\varrho\vec{e}_\varrho + (z-z')\vec{e}_z}{\sqrt{\varrho^2 + (z-z')^2}^3} \mathrm{d}z' \\
\vec{F} &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon c} \int_0^c \frac{\varrho\vec{e}_\varrho + (z-z')\vec{e}_z}{\sqrt{\varrho^2 + (z-z')^2}^3} \mathrm{d}z' = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon c} \left(\varrho\vec{e}_\varrho \int_0^c \frac{\mathrm{d}z'}{\sqrt{\varrho^2 + (z-z')^2}^3} + \vec{e}_z \int_0^c \frac{(z-z')\mathrm{d}z'}{\sqrt{\varrho^2 + (z-z')^2}^3} \right) \\
&\overset{206\ 207}{=} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon c} \left(\varrho\vec{e}_\varrho \left[-\frac{z-z'}{\varrho^2\sqrt{\varrho^2 + (z-z')^2}} \right]_0^c + \vec{e}_z \left[\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + (z-z')^2}} \right]_0^c \right) \\
&= \underline{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon c} \left[\left(\frac{z}{\varrho\sqrt{\varrho^2 + z^2}} - \frac{z-c}{\varrho\sqrt{\varrho^2 + (z-c)^2}} \right) \vec{e}_\varrho + \left(\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + (z-c)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} \right) \vec{e}_z \right]}
\end{aligned}$$

Hinweis: Die Kraft $\vec{F}$ kann auch direkt aus dem COULOMB-Integral berechnet werden. Die Linienladung drückt man dazu mithilfe der Delta-Distribution als Raumladung durch $\varrho_\mathrm{V}(x', y', z') = \lambda(z')\delta(x')\delta(y')$ aus mit $\lambda(z') = \lambda$ im Bereich $z' \in [0, c]$ und $\lambda(z') = 0$ außerhalb. Bei der Bildung des Integrals über den gesamten Raum verbleibt dann aufgrund der Ausblendeigenschaft der Delta-Distribution die Integration entlang der z-Achse:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon} \iiint \varrho_\mathrm{V}(x', y', z') \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \mathrm{d}V' = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon} \iiint \lambda(z')\delta(x')\delta(y') \frac{\varrho\vec{e}_\varrho + (z-z')\vec{e}_z}{\sqrt{\varrho^2 + (z-z')^2}^3} \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' \\
&= \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon} \int \lambda(z') \frac{\varrho\vec{e}_\varrho + (z-z')\vec{e}_z}{\sqrt{\varrho^2 + (z-z')^2}^3} \mathrm{d}z' = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon c} \int_0^c \frac{\varrho\vec{e}_\varrho + (z-z')\vec{e}_z}{\sqrt{\varrho^2 + (z-z')^2}^3} \mathrm{d}z'
\end{aligned}$$

[206] Integral #206 nach BRONSTEIN, *Taschenbuch der Mathematik*:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}} \qquad \text{mit} \qquad X = x^2 + a^2$$

[207] Integral #207 nach BRONSTEIN, *Taschenbuch der Mathematik*:

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}} \qquad \text{mit} \qquad X = x^2 + a^2$$

4.2 Linienladung 2

Die von der Linienladung mit der Linienladungsdichte $\lambda = \frac{Q_L}{a-b}$ hervorgerufene elektrische Feldstärke $\vec{E}$ berechnet sich wieder nach dem differentiellen Ansatz wie in Aufgabe 4.1. Dabei ist $\vec{r} = x\vec{e}_x$ der Beobachtungspunkt auf der positiven x-Achse und $\vec{r}' = x'\vec{e}_x$ der Ort eines Ladungselementes $\mathrm{d}Q$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{E} &= \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{\lambda \mathrm{d}x'}{4\pi\varepsilon}\frac{(x-x')\vec{e}_x}{(x-x')^3} = \frac{Q_L}{4\pi\varepsilon(a-b)}\frac{\mathrm{d}x'}{(x-x')^2}\vec{e}_x \\
\vec{E} &= \frac{Q_L}{4\pi\varepsilon(a-b)}\vec{e}_x\int_{-a}^{-b}\frac{\mathrm{d}x'}{(x-x')^2} = \frac{Q_L}{4\pi\varepsilon(a-b)}\vec{e}_x\left[\frac{1}{x-x'}\right]_{-a}^{-b} \\
&= \frac{Q_L}{4\pi\varepsilon(a-b)}\left(\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right)\vec{e}_x = \underline{\frac{Q_L}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{e}_x}{(x+a)(x+b)}}
\end{aligned}$$

4.3 Kreisring mit Linienladung

Zur Bescheibung des Problems wählt man günstigerweise Zylinderkoordinaten, sodass sich die durch den Kreisring gebildete Ladungsverteilung mit der Linienladungsdichte $\lambda = \frac{Q_0}{2\pi a}$ als Raumladungsverteilung mit der Raumladungsdichte $\varrho_\mathrm{V}(\varrho,\varphi,z') = \lambda\delta(\varrho-a)\delta(z')$ schreiben lässt. Beobachtungspunkt ist ein Punkt auf der z-Achse mit $\vec{r} = z\vec{e}_z$, der Ort der Ladungsverteilung wird beschrieben durch den Quellpunktvektor $\vec{r}' = a\vec{e}_\varrho$. Für das Potential folgt dann

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\frac{\varrho_\mathrm{V}(\varrho,\varphi,z')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\frac{\lambda\delta(\varrho-a)\delta(z')}{|z\vec{e}_z - a\vec{e}_\varrho|}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}z' \\
&= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon(2\pi a)}\int_0^{2\pi}\frac{a\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon(2\pi a)}\frac{2\pi a}{\sqrt{z^2+a^2}} = \underline{\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon\sqrt{z^2+a^2}}}
\end{aligned}$$

Das elektrische Feld bestimmt sich nun aus der Beziehung $\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi$ zu

$$\vec{E}(z) = -\left(\underbrace{\frac{\partial\Phi(z)}{\partial x}}_{=0}\vec{e}_x + \underbrace{\frac{\partial\Phi(z)}{\partial y}}_{=0}\vec{e}_y + \frac{\partial\Phi(z)}{\partial z}\vec{e}_z\right) = -\left[\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{2z}{2\sqrt{z^2+a^2}^3}\right)\vec{e}_z\right] = \underline{\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon}\frac{z\vec{e}_z}{\sqrt{z^2+a^2}^3}}$$

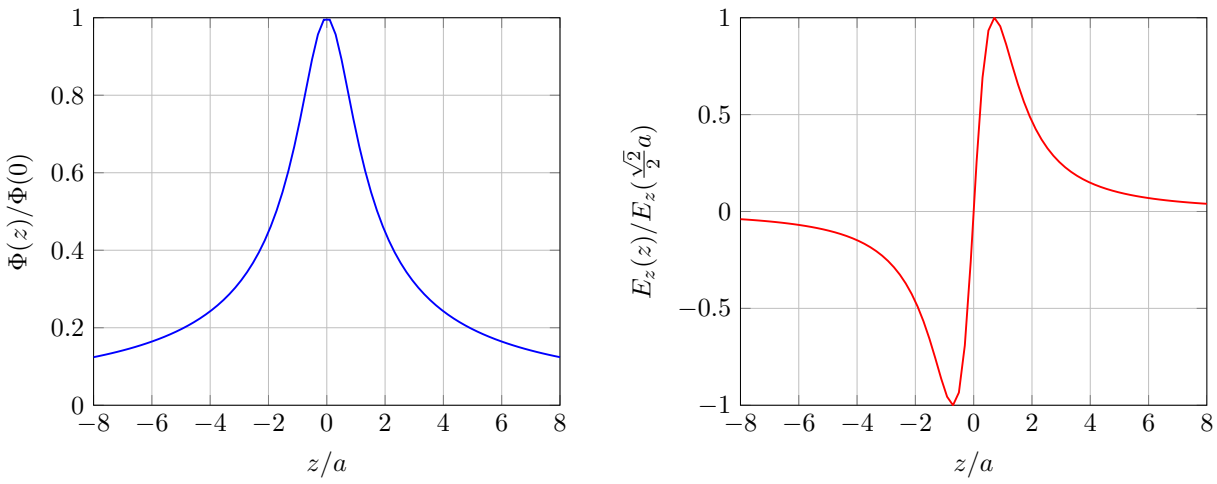


Abbildung 4.1: Normierte Verläufe des elektrischen Potentials $\Phi(\frac{z}{a})$ und der Feldstärke $E_z(\frac{z}{a})$

4.4 Kreisbogen mit Linienladung

Die Berechnung des Potentials und der elektrischen Feldstärke erfolgt analog zu Aufgabe 4.3. Statt eines geschlossenen Kreisrings besteht die Ladungsverteilung nun allerdings aus zwei Viertelkreisbögen und für die Raumladungsdichte gilt

$$\varrho_{\mathrm{V}}(\varrho,\varphi,z') = \lambda(\varphi)\delta(\varrho-a)\delta(z') \qquad \text{mit} \qquad \lambda(\varphi) = \begin{cases} \frac{2Q_0}{\pi a} & \text{für } \varphi \in [\frac{\pi}{2},\pi] \vee [\frac{3\pi}{2},2\pi] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint \frac{\varrho_{\mathrm{V}}(\varrho,\varphi,z')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint \frac{\lambda(\varphi)\delta(\varrho-a)\delta(z')}{|z\vec{e}_z - a\vec{e}_\varrho|}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}z' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda(\varphi)a\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{Q_0}{2\pi^2\varepsilon\sqrt{z^2+a^2}}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\right] = \underline{\frac{Q_0}{2\pi\varepsilon\sqrt{z^2+a^2}}} \\
\vec{E}(z) &= -\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z}\vec{e}_z = -\left[\frac{Q_0}{2\pi\varepsilon}\left(-\frac{2z}{2\sqrt{z^2+a^2}^3}\right)\vec{e}_z\right] = \underline{\frac{Q_0}{2\pi\varepsilon}\frac{z\vec{e}_z}{\sqrt{z^2+a^2}^3}}
\end{aligned}$$

4.5 Geschlossener Halbkreisbogen mit Linienladung

Da die gegebene Ladungsverteilung keine spezielle Symmetrie aufweist, berechnet man das Potential abschnittsweise - für das geradlinige Wegstück $\overline{P_1P_2}$ in kartesischen und für den Halbkreisbogen $\overline{P_2P_3P_1}$ in Zylinderkoordinaten. Die Linienladungsdichte beträgt auf dem gesamten Weg $\lambda = \frac{Q}{2a+\pi a}$.

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint \frac{\lambda(y')\delta(x')\delta(z')}{|z\vec{e}_z - y'\vec{e}_y|}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint \frac{\lambda(\varphi)\delta(\varrho-a)\delta(z')}{|z\vec{e}_z - a\vec{e}_\varrho|}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}z' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{(2+\pi)a}\left[\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{z^2+y'^2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{a\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{z^2+a^2}}\right] \\
&\overset{192}{=} \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon(2+\pi)a}\left[\ln\left|\frac{a+\sqrt{z^2+a^2}}{a-\sqrt{z^2+a^2}}\right| + \frac{a\pi}{\sqrt{z^2+a^2}}\right]}
\end{aligned}$$

4.6 Kreisscheibe mit konstanter Flächenladungsdichte

Die Raumladungsdichte der mit der konstanten Flächenladung ϱ_{F} belegten Kreisscheibe drückt sich in Zylinderkoordinaten durch $\varrho_{\mathrm{V}}(\varrho,\varphi,z') = \varrho_{\mathrm{F}}\delta(z')$ für $\varrho \le a$ und $\varphi \in [0,2\pi]$ aus. Mit dem Quellpunktvektor $\vec{r}' = \varrho\vec{e}_\varrho$ berechnet sich das Potential auf der z-Achse zu

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint \frac{\varrho_{\mathrm{V}}(\varrho,\varphi,z')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint \frac{\varrho_{\mathrm{F}}\delta(z')}{|z\vec{e}_z - \varrho\vec{e}_\varrho|}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}z' \\
&= \frac{\varrho_{\mathrm{F}}}{4\pi\varepsilon}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\varrho}{\sqrt{z^2+\varrho^2}}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho = \frac{\varrho_{\mathrm{F}}}{2\varepsilon}\left[\sqrt{z^2+\varrho^2}\right]_0^a = \underline{\frac{\varrho_{\mathrm{F}}}{2\varepsilon}\left(\sqrt{z^2+a^2}-\sqrt{z^2}\right)}
\end{aligned}$$

Entsprechend folgt für die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(z) = -\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z}\vec{e}_z = -\left[\frac{\varrho_{\mathrm{F}}}{2\varepsilon}\left(\frac{2z}{2\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{2z}{2\sqrt{z^2}}\right)\vec{e}_z\right] = \underline{\frac{\varrho_{\mathrm{F}}z}{2\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\vec{e}_z}$$

[192] Integral #192 nach Bronstein, *Taschenbuch der Mathematik*:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \ln\left(x+\sqrt{X}\right)+C_1 \qquad \text{mit} \qquad X = x^2+a^2 \quad \text{und} \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

4.7 Kreisscheibe mit ortsabhängiger Flächenladungsdichte

Besitzt die Kreisscheibe aus Aufgabe 4.6 keine gleichmäßige, sondern eine radial verteilte Flächenladung mit Ladungsdichte $\varrho_{\mathrm{F}}(\varrho) = \varrho_{\mathrm{F}0}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2$, so bestimmt sich die elektrische Feldstärke auf der z-Achse zu

$$\begin{aligned}
\vec{E}(z) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint \varrho_{\mathrm{V}}(\varrho,\varphi,z')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint \varrho_{\mathrm{F}}(\varrho)\delta(z')\frac{z\vec{e}_z-\varrho\vec{e}_\varrho}{|z\vec{e}_z-\varrho\vec{e}_\varrho|^3}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}z' \\
&= \frac{\varrho_{\mathrm{F}0}}{4\pi\varepsilon a^2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\varrho^3\frac{z\vec{e}_z-\varrho\vec{e}_\varrho}{\sqrt{z^2+\varrho^2}^3}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho = \frac{\varrho_{\mathrm{F}0}}{2\varepsilon a^2}\int_0^a\frac{\varrho^3 z\vec{e}_z}{\sqrt{z^2+\varrho^2}^3}\mathrm{d}\varrho \\
\overset{t:=z^2+\varrho^2}{=} &\ \frac{\varrho_{\mathrm{F}0}z}{2\varepsilon a^2}\vec{e}_z\frac{1}{2}\int_{t(0)}^{t(a)}\frac{(t-z^2)}{\sqrt{t}^3}\mathrm{d}t = \frac{\varrho_{\mathrm{F}0}z}{2\varepsilon a^2}\cdot\frac{1}{2}\left[\int_{t(0)}^{t(a)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}-z^2\int_{t(0)}^{t(a)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}^3}\right]\vec{e}_z \\
&= \frac{\varrho_{\mathrm{F}0}z}{2\varepsilon a^2}\left[\sqrt{z^2+\varrho^2}+\frac{z^2}{\sqrt{z^2+\varrho^2}}\right]_0^a\vec{e}_z = \underline{\frac{\varrho_{\mathrm{F}0}z}{2\varepsilon a^2}\left(\frac{2z^2+a^2}{\sqrt{z^2+a^2}}-\frac{2z^2}{\sqrt{z^2}}\right)\vec{e}_z}
\end{aligned}$$

Bei der vektoriellen Integration ist zu beachten, dass der Radialeinheitsvektor $\vec{e}_\varrho$ im Gegensatz zum kartesischen Einheitsvektor $\vec{e}_z$ nicht konstant bleibt und sich die Beiträge in radialer Richtung im Falle einer symmetrischen Integration über den Winkel φ gegenseitig aufheben. Dies wird deutlicher, wenn man den Radialeinheitsvektor in kartesischen Koordinaten formuliert:

$$\int_0^{2\pi}\vec{e}_\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}(\cos\varphi\vec{e}_x+\sin\varphi\vec{e}_y)\,\mathrm{d}\varphi = \vec{e}_x\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}_{=0}+\vec{e}_y\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}_{=0} = \vec{0}$$

4.8 Parallele Platten mit Flächenladung

Zur Beschreibung des Problems wählt man kartesische Koordinaten. Der Beobachtungspunkt auf der x-Achse ist durch den Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{e}_x$, der Ort der Ladungsverteilung auf den parallelen Platten bei $z' = \pm c$ durch die Quellpunktvektoren $\vec{r}'_{1/2} = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y \pm c\vec{e}_z$ gegeben. Die Raumladungsdichte formuliert sich somit als $\varrho_{\mathrm{V}1/2} = \varrho_{\mathrm{F}1/2}(x', y')\delta(z' \mp c)$ mit $\varrho_{\mathrm{F}1/2} = \pm\varrho_0$ im Bereich $x' \in [-a, a]$ und $y' \in [-b, b]$. Die elektrische Feldstärke ist dann

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(x) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint \varrho_{\mathrm{V}}(x', y', z')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\iiint \varrho_{\mathrm{V}1}\frac{\vec{r}-\vec{r}_1'}{|\vec{r}-\vec{r}_1'|^3}\mathrm{d}V' + \iiint \varrho_{\mathrm{V}2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_2'}{|\vec{r}-\vec{r}_2'|^3}\mathrm{d}V'\right] \\
&= \frac{\varrho_0}{4\pi\varepsilon}\left[\iint \frac{(x-x')\vec{e}_x - y'\vec{e}_y - c\vec{e}_z}{\sqrt{(x-x')^2+y'^2+c^2}^3}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' - \iint \frac{(x-x')\vec{e}_x - y'\vec{e}_y + c\vec{e}_z}{\sqrt{(x-x')^2+y'^2+c^2}^3}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\right] \\
&= \frac{\varrho_0}{4\pi\varepsilon}\left(-2c\vec{e}_z\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{\sqrt{(x-x')^2+y'^2+c^2}^3}\right) \overset{m:=(x-x')^2+c^2}{=} -\frac{\varrho_0 c}{2\pi\varepsilon}\vec{e}_z\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\frac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{m+y'^2}^3}\mathrm{d}x' \\
&= -\frac{\varrho_0 c}{2\pi\varepsilon}\vec{e}_z\int_{-a}^{a}\left[\frac{y'}{m\sqrt{m+y'^2}}\right]_{-b}^{b}\mathrm{d}x' = -\frac{\varrho_0 bc}{\pi\varepsilon}\vec{e}_z\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x'}{[(x-x')^2+c^2]\sqrt{(x-x')^2+b^2+c^2}} \\
&\overset{267}{=} \frac{\varrho_0 bc}{\pi\varepsilon}\vec{e}_z\left[\frac{1}{bc}\arctan\frac{(x-x')b}{c\sqrt{(x-x')^2+b^2+c^2}}\right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{\varrho_0}{\pi\varepsilon}\vec{e}_z\left(\arctan\frac{(x-a)b}{c\sqrt{(x-a)^2+b^2+c^2}} - \arctan\frac{(x+a)b}{c\sqrt{(x+a)^2+b^2+c^2}}\right)
\end{aligned}
$$

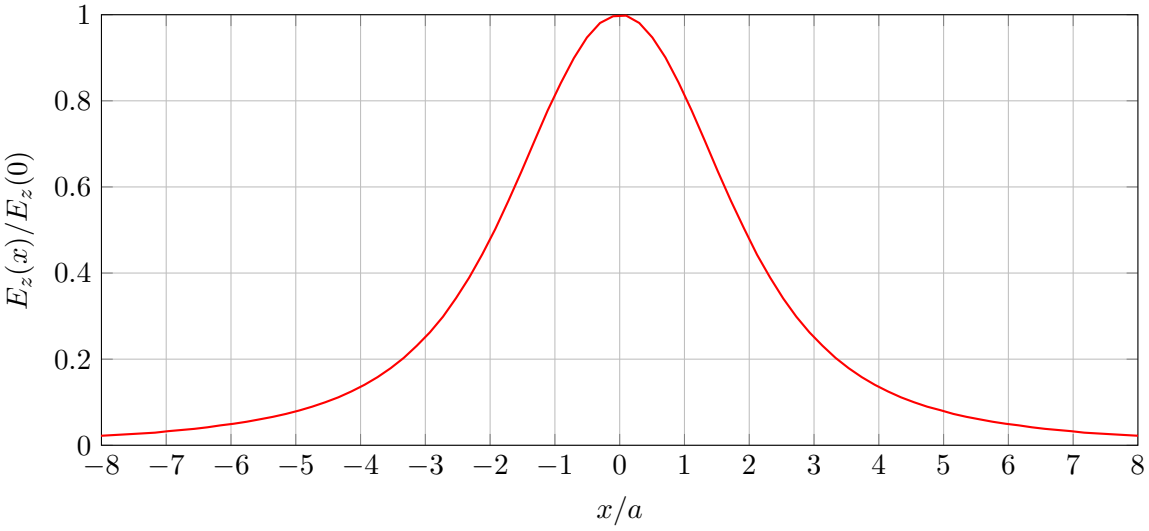


Abbildung 4.2: Normierter Verlauf der elektrischen Feldstärke $E_z(\frac{x}{a})$, beispielhaft für $2a = b = c$.

[267] Integral #267 nach Bronstein, *Taschenbuch der Mathematik*:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+b)\sqrt{fx^2+g}} = \frac{1}{\sqrt{b}\sqrt{ag-bf}}\arctan\frac{x\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}} \qquad (ag-bf>0)$$

4.9 Homogene Raumladung in Form einer Kugel

Die kugelsymmetrische und homogene Raumladung wird durch die Ladungsverteilung $\varrho(r',\vartheta,\varphi)=\varrho_0$ im Bereich $r'\in[0,a]$, $\vartheta\in[0,\pi]$ und $\varphi\in[0,2\pi]$ mit dem Quellpunktvektor $\vec{r}'=r'\vec{e}_r{}'$ beschrieben. Der Beobachtungspunkt befindet sich bei $\vec{r}=r\vec{e}_r$. Zur Vereinfachung legt man diesen auf die positive z-Achse, was aufgrund der Kugelsymmetrie ohne Einschränkungen möglich ist. Damit entfällt die Abhängigkeit des Abstandes $|\vec{r}-\vec{r}'|$ vom Winkel φ, der Betrag des Differenzvektors lässt sich mithilfe des Kosinussatzes als $|r\vec{e}_r-r'\vec{e}_r{}'|^2=r'^2+r^2-2rr'\cos\vartheta$ schreiben und für das Skalarpotential folgt

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\frac{\varrho_{\mathrm{V}}(r',\vartheta,\varphi)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'=\frac{\varrho_0}{4\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{r'^2\sin\vartheta\mathrm{d}r'\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi}{|r\vec{e}_r-r'\vec{e}_r{}'|}\\
&= \frac{\varrho_0}{4\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{r'^2\sin\vartheta\mathrm{d}r'\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}}=\underline{\frac{\varrho_0}{2\varepsilon}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{r'^2\sin\vartheta\mathrm{d}r'\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}}}\\
&\overset{\substack{m=2rr'\\ n=r^2+r'^2}}{=} \frac{\varrho_0}{2\varepsilon}\int_0^{a}r'^2\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{n-m\cos\vartheta}}\right]\mathrm{d}r'\overset{t:=\cos\vartheta}{=}\frac{\varrho_0}{2\varepsilon}\int_0^{a}r'^2\left[-\int_{t(0)}^{t(\pi)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{n-mt}}\right]\mathrm{d}r'\\
&= \frac{\varrho_0}{2\varepsilon}\int_0^{a}r'^2\left[\frac{2}{m}\sqrt{n-mt}\right]_{t(0)}^{t(\pi)}\mathrm{d}r'=\frac{\varrho_0}{2\varepsilon}\int_0^{a}\frac{r'}{r}\left[\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}\right]_0^{\pi}\mathrm{d}r'\\
&= \underline{\frac{\varrho_0}{2\varepsilon}\int_0^{a}\frac{r'}{r}\left(\sqrt{(r+r')^2}-\sqrt{(r-r')^2}\right)\mathrm{d}r'=\frac{\varrho_0}{2\varepsilon}\int_0^{a}\frac{r'}{r}\left(|r+r'|-|r-r'|\right)\mathrm{d}r'}
\end{aligned}
$$

Befindet man sich innerhalb der Kugel, so ist eine Fallunterscheidung zum Auflösen der Beträge und somit eine Aufspaltung in zwei Bereichsintegrale notwendig:

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) &= \frac{\varrho_0}{2\varepsilon}\int_0^{a}\frac{r'}{r}\left(|r+r'|-|r-r'|\right)\mathrm{d}r'=\frac{\varrho_0}{2\varepsilon r}\left(\int_0^{r}r'\left(r+r'-r+r'\right)\mathrm{d}r'+\int_r^{a}r'\left(r+r'+r-r'\right)\mathrm{d}r'\right)\\
&= \frac{\varrho_0}{\varepsilon r}\left(\int_0^{r}r'^2\mathrm{d}r'+r\int_r^{a}r'\mathrm{d}r'\right)=\frac{\varrho_0}{\varepsilon r}\left(\left[\frac{r'^3}{3}\right]_0^{r}+r\left[\frac{r'^2}{2}\right]_r^{a}\right)=\underline{\frac{\varrho_0}{\varepsilon}\left(\frac{a^2}{2}-\frac{r^2}{6}\right)\qquad(r\le a)}
\end{aligned}
$$

Außerhalb der Ladungsverteilung gilt dagegen

$$
\Phi(\vec{r})=\frac{\varrho_0}{2\varepsilon}\int_0^{a}\frac{r'}{r}\left(|r+r'|-|r-r'|\right)\mathrm{d}r'=\frac{\varrho_0}{\varepsilon r}\int_0^{a}r'^2\mathrm{d}r'=\frac{\varrho_0}{\varepsilon r}\left[\frac{r'^3}{3}\right]_0^{a}=\underline{\frac{\varrho_0}{\varepsilon}\frac{a^3}{3r}\qquad(r>a)}
$$

Das elektrische Feld bestimmt sich wiederum aus dem Gradienten des Potentials

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}}_{=0}\vec{e}_\vartheta+\frac{1}{r\sin\vartheta}\underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}}_{=0}\vec{e}_\varphi\right)=-\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r\\
\vec{E}(\vec{r}) &= \underline{\begin{cases}\dfrac{\varrho_0 r}{3\varepsilon}\vec{e}_r=\dfrac{\varrho_0}{3\varepsilon}\vec{r} & r\le a\\[2ex] \dfrac{\varrho_0}{3\varepsilon}\dfrac{a^3}{r^2}\vec{e}_r=\dfrac{\varrho_0}{3\varepsilon}\left(\dfrac{a}{r}\right)^3\vec{r} & r>a\end{cases}}
\end{aligned}
$$

5 Elektrostatik - Gaußsche Methode

5.1 Unendlich langer Zylinderkondensator

Das Skalarpotential des unendlich langen Zylinderkondensators mit Innenradius R_i und Außenradius R_a soll unter Nutzung der GAUSSschen Methode bestimmt werden. Der hierfür erforderliche Ansatz leitet sich aus den MAXWELLschen Gleichungen durch Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes ab

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon \operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) &= \varrho_\mathrm{V}(\vec{r}') \\ \iiint\limits_{V'} \operatorname{div}\vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}V' = \oiint\limits_{\partial V'} \vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{A} &= \frac{1}{\varepsilon}\iiint\limits_{V'} \varrho_\mathrm{V}(\vec{r}')\mathrm{d}V' \end{aligned}$$

Das Integrationsvolumen V' ist dabei beliebig wählbar. Aufgrund der vorliegenden Zylindersymmetrie wird daher ein koaxial um die Ladungsverteilung angeordnetes Zylindervolumen mit Radius ϱ gewählt. Dies gestattet zugleich die Vereinfachung des vektoriellen zu einem skalaren Integral, da der Feldvektor $\vec{E} = E_\varrho \vec{e}_\varrho$ und der Normalenvektor der Oberfläche $\mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}A\vec{e}_\varrho$ an jedem Punkt parallel zueinander verlaufen und somit $\vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = E_\varrho \mathrm{d}A$ ist. Man kann also schreiben

$$\begin{aligned} \oiint\limits_{\partial V'} E_\varrho(\varrho)\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z &= \frac{1}{\varepsilon}\iiint\limits_{V'} \varrho_\mathrm{V}\Theta(\varrho' - R_i)\Theta(R_l - \varrho')\varrho'\mathrm{d}\varrho'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}z' \\ E_\varrho(\varrho)\varrho\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z &= \frac{\varrho_\mathrm{V}}{\varepsilon}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z'\int\limits_0^{\varrho}\varrho'\Theta(\varrho' - R_i)\Theta(R_l - \varrho')\mathrm{d}\varrho' \\ E_\varrho(\varrho) &= \frac{\varrho_\mathrm{V}}{\varepsilon\varrho}\int\limits_0^{\varrho}\varrho'\Theta(\varrho' - R_i)\Theta(R_l - \varrho')\mathrm{d}\varrho' \end{aligned}$$

Zur Darstellung der Raumladungsdichte wurde hierbei die Einheitssprungfunktion[1] Θ genutzt, um auszudrücken, dass ϱ_V nur im Bereich $R_i \leq \varrho \leq R_l$ definiert ist. Befindet man sich innerhalb der Innenelektrode mit $\varrho < R_i$, so wird vom Integrationsvolumen keine Ladung umschlossen und das elektrische Feld ist Null. Im Inneren der Ladungsverteilung ist nur ein Teil der Ladung im Integrationsvolumen enthalten und es ist

$$E_{\varrho,i}(\varrho) = \frac{\varrho_\mathrm{V}}{\varepsilon\varrho}\int\limits_{R_i}^{\varrho}\varrho'\mathrm{d}\varrho' = \frac{\varrho_\mathrm{V}}{\varepsilon\varrho}\left[\frac{\varrho'^2}{2}\right]_{R_i}^{\varrho} = \underline{\frac{\varrho_\mathrm{V}}{2\varepsilon}\left(\varrho - \frac{R_i^2}{\varrho}\right) \qquad (R_i \leq \varrho \leq R_l)}$$

Außerhalb der Ladungsverteilung umschließt man dagegen die gesamte Ladung, wobei die HEAVISIDE-Funktion allerdings nur einen Beitrag für $R_i \leq \varrho \leq R_l$ zur Integration liefert, sodass gilt

$$E_{\varrho,a}(\varrho) = \frac{\varrho_\mathrm{V}}{\varepsilon\varrho}\int\limits_{R_i}^{R_l}\varrho'\mathrm{d}\varrho' = \frac{\varrho_\mathrm{V}}{\varepsilon\varrho}\left[\frac{\varrho'^2}{2}\right]_{R_i}^{R_l} = \underline{\frac{\varrho_\mathrm{V}}{2\varepsilon}\left(\frac{R_l^2 - R_i^2}{\varrho}\right) \qquad (\varrho > R_l)}$$

Das Skalarpotential berechnet sich nun über den Gradienten aus dem elektrischen Feld gemäß

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\operatorname{grad}\Phi(\vec{r}) = -\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial\varrho}\vec{e}_\varrho \\ -\int\limits_{\varrho_0}^{\varrho} E(\vec{r}')\mathrm{d}\varrho' &= \int\limits_{\varrho_0}^{\varrho}\Phi(\vec{r}')\mathrm{d}\varrho' = \Phi(\varrho) - \Phi(\varrho_0) \end{aligned}$$

[1] Diese auch als HEAVISIDE-Funktion oder Stufenfunktion bezeichnete Distribution ist definiert durch

$$\Theta(x) := \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ 1 & : \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Beginnend an der geerdeten Außenelektrode mit $\Phi(\varrho_0 = R_a) = 0$, ist das Potential außerhalb der Ladungsverteilung somit

$$\begin{aligned}\Phi_a(\varrho) &= \underbrace{\Phi(R_a)}_{=0} - \int_{R_a}^{\varrho} E_{\varrho,a}(\varrho')\mathrm{d}\varrho' = -\frac{\varrho_\mathrm{V}}{2\varepsilon}\left(R_l^2 - R_i^2\right)\int_{R_a}^{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho'}{\varrho'} \\ &= -\frac{\varrho_\mathrm{V}}{2\varepsilon}\left(R_l^2 - R_i^2\right)\Big[\ln|\varrho'|\Big]_{R_a}^{\varrho} = \underline{\frac{\varrho_\mathrm{V}}{2\varepsilon}\left(R_l^2 - R_i^2\right)\ln\left(\frac{R_a}{\varrho}\right) \qquad (\varrho > R_l)}\end{aligned}$$

und für das Potential im Inneren gilt

$$\begin{aligned}\Phi_i(\varrho) &= \underbrace{-\int_{R_a}^{R_l} E_{\varrho,a}(\varrho')\mathrm{d}\varrho'}_{=\Phi_a(R_l)} - \int_{R_l}^{\varrho} E_{\varrho,i}(\varrho')\mathrm{d}\varrho' = \Phi_a(R_l) - \frac{\varrho_\mathrm{V}}{2\varepsilon}\int_{R_l}^{\varrho}\left(\varrho' - \frac{R_i^2}{\varrho'}\right)\mathrm{d}\varrho' \\ &= \Phi_a(R_l) - \frac{\varrho_\mathrm{V}}{2\varepsilon}\left[\frac{\varrho'^2}{2} - R_i^2\ln|\varrho'|\right]_{R_l}^{\varrho} = \underline{\frac{\varrho_\mathrm{V}}{2\varepsilon}\left[\frac{R_l^2 - \varrho^2}{2} + R_i^2\ln\left(\frac{\varrho}{R_l}\right)\right] + \Phi_a(R_l) \quad (R_i \le \varrho \le R_l)}\end{aligned}$$

Speziell auf der Innenelektrode und der Außenschicht der Ladungsverteilung ergeben sich damit die Potentiale

$$\begin{aligned}\Phi(R_i) &= \Phi_i(R_i) = \frac{\varrho_\mathrm{V}}{2\varepsilon}\left[\frac{R_l^2 - R_i^2}{2} + R_i^2\ln\left(\frac{R_i}{R_l}\right)\right] + \Phi(R_l) \\ \Phi(R_l) &= \Phi_a(R_l) = \frac{\varrho_\mathrm{V}}{2\varepsilon}\left(R_l^2 - R_i^2\right)\ln\left(\frac{R_a}{R_l}\right)\end{aligned}$$

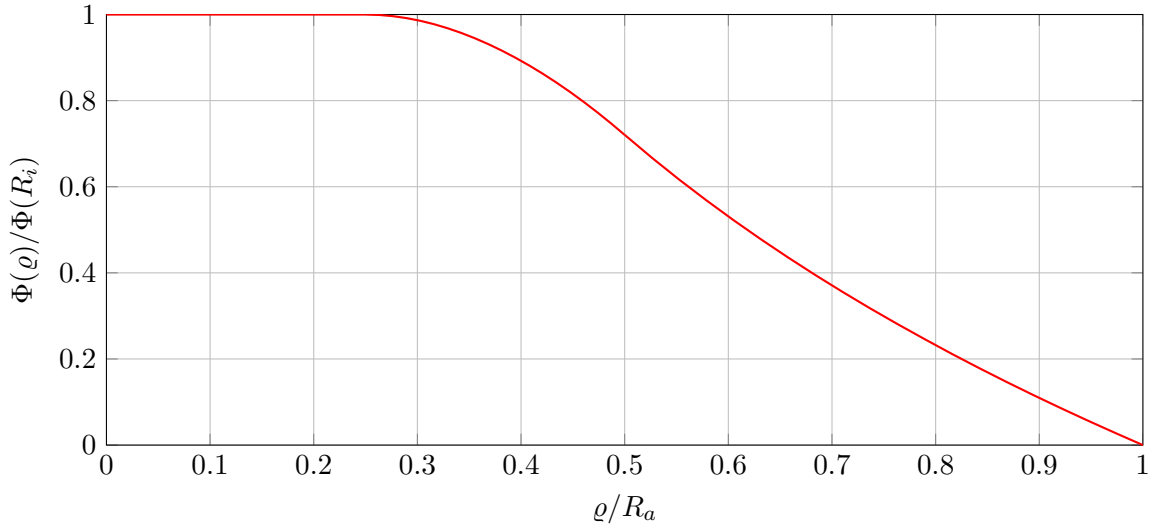


Abbildung 5.1: Normierter Verlauf des elektrischen Potentials $\Phi(\frac{\varrho}{R_a})$ für $R_a = 4R_i = 2R_l$.

5.2 Kugel mit homogener Raumladungsverteilung

Skalarpotential und elektrische Feldstärke der kugelförmigen Raumladungsverteilung aus Aufgabe 4.9 sollen nun unter Nutzung der GAUSSschen Methode bestimmt werden. Der Ansatz lautet wieder

$$\oiint_{\partial V'} \vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon}\iiint_{V'} \varrho_\mathrm{V}(\vec{r}')\mathrm{d}V'$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie wird ein konzentrisch um die Ladungsverteilung angeordnetes Kugelvolumen mit Radius r gewählt. Feldvektor $\vec{E} = E_r\vec{e}_r$ und Normalenvektor der Oberfläche $\mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}A\vec{e}_r$ verlaufen wiederum parallel, sodass sich das Integral mit $\vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = E_r\mathrm{d}A$ vereinfachen lässt zu

$$\begin{aligned}
\oiint_{\partial V'} E_r(r)r^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi &= \frac{1}{\varepsilon}\iiint_{V'} \varrho_0\Theta(a-r')r'^2\sin\vartheta\mathrm{d}r'\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \\
E_r(r)r^2\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta}_{=4\pi} &= \frac{\varrho_0}{\varepsilon}\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta}_{=4\pi}\int_0^{r}\Theta(a-r')r'^2\mathrm{d}r' \\
E_r(r) &= \frac{\varrho_0}{\varepsilon r^2}\int_0^{r}\Theta(a-r')r'^2\mathrm{d}r'
\end{aligned}$$

mit der Einheitssprungfunktion Θ zur Beschreibung der Raumladungsdichte wie in Aufgabe 5.1. Befindet man sich innerhalb der Ladungsverteilung, so umschließt das Integrationsvolumen nur einen Teil der Ladung und es ist

$$E_i(r) = \frac{\varrho_0}{\varepsilon r^2}\int_0^{r}\Theta(a-r')r'^2\mathrm{d}r' = \frac{\varrho_0}{\varepsilon r^2}\int_0^{r}r'^2\mathrm{d}r' = \frac{\varrho_0}{\varepsilon r^2}\left[\frac{r'^3}{3}\right]_0^{r} = \underline{\frac{\varrho_0}{\varepsilon}\frac{r}{3} \qquad (r \le a)}$$

Außerhalb der Ladungsverteilung wird dagegen die gesamte Ladung umschlossen. Die HEAVISIDE-Funktion liefert bei der Integration allerdings nur einen Beitrag für $r \le a$, sodass gilt

$$E_a(r) = \frac{\varrho_0}{\varepsilon r^2}\int_0^{r}\Theta(a-r')r'^2\mathrm{d}r' = \frac{\varrho_0}{\varepsilon r^2}\int_0^{a}r'^2\mathrm{d}r' = \frac{\varrho_0}{\varepsilon r^2}\left[\frac{r'^3}{3}\right]_0^{a} = \underline{\frac{\varrho_0}{3\varepsilon}\frac{a^3}{r^2} \qquad (r > a)}$$

Das Skalarpotential berechnet sich über den Gradienten aus dem elektrischen Feld gemäß

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= -\operatorname{grad}\Phi(\vec{r}) = -\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial r}\vec{e}_r \\
-\int_{r_0}^{r}E(\vec{r}')\mathrm{d}r' &= \int_{r_0}^{r}\Phi(\vec{r}')\mathrm{d}r' = \Phi(r) - \Phi(r_0)
\end{aligned}$$

Zweckmäßigerweise beginnt man die Integration im Unendlichen, da man das Potential $\Phi(r_0) = \Phi_0$ für $r_0 \to \infty$ als verschwindend annimmt. So folgt für einen Punkt außerhalb der Kugel

$$\Phi_a(r) = \underbrace{\Phi(r_0)}_{=0} - \int_{r_0}^{r}E_a(\vec{r}')\mathrm{d}r' = -\frac{\varrho_0 a^3}{3\varepsilon}\int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{d}r'}{r'^2} = -\frac{\varrho_0 a^3}{3\varepsilon}\left[-\frac{1}{r'}\right]_{r_0\to\infty}^{r} = \underline{\frac{\varrho_0}{\varepsilon}\frac{a^3}{3r} \qquad (r > a)}$$

Die Integration bis zu einem Punkt im Inneren erfordert wieder eine Zerlegung in zwei Bereichsintegrale

$$\begin{aligned}
\Phi_i(r) &= -\left(\int_{r_0}^{a}E_a(\vec{r}')\mathrm{d}r' + \int_{a}^{r}E_i(\vec{r}')\mathrm{d}r'\right) = -\left(\frac{\varrho_0 a^3}{3\varepsilon}\int_{r_0}^{a}\frac{\mathrm{d}r'}{r'^2} + \frac{\varrho_0}{3\varepsilon}\int_{a}^{r}r'\mathrm{d}r'\right) \\
&= -\frac{\varrho_0}{3\varepsilon}\left(a^3\left[-\frac{1}{r'}\right]_{r_0\to\infty}^{a} + \left[\frac{r'^2}{2}\right]_{a}^{r}\right) = \frac{\varrho_0}{3\varepsilon}\left(a^2 - \frac{r^2-a^2}{2}\right) = \underline{\frac{\varrho_0}{\varepsilon}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{6}\right) \qquad (r \le a)}
\end{aligned}$$

6 Elektrostatik - Poisson- und Laplace-Gleichung

6.1 Kugel mit homogener Raumladungsverteilung

Für die Raumladungsverteilung aus Aufgabe 4.9 lässt sich das Skalarpotential und die elektrische Feldstärke ebenfalls mithilfe der POISSON-Gleichung berechnen. Aus der Rotationssymmetrie der Anordnung ergibt sich zunächst, dass das elektrostatische Feld $\vec{E}$ ein Zentralfeld ist und nur eine Radialkomponente aufweist. Da das zugehörige Potential gemäß der Beziehung $\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi$ mit dem elektrischen Feld verknüpft ist, folgt hieraus, dass auch Φ kugelsymmetrisch ist und keine Abhängigkeit von ϑ und φ aufweist. Somit kann man schreiben

$$\begin{aligned} \triangle\,\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\underbrace{\frac{\partial\Phi(r)}{\partial\vartheta}}_{=0}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\underbrace{\frac{\partial^2\Phi(r)}{\partial\varphi^2}}_{=0} &= -\frac{\varrho_{\mathrm{V}}(\vec{r})}{\varepsilon} \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}\right) &= -\frac{\varrho_0}{\varepsilon}\Theta(a-r) \end{aligned}$$

Zur Formulierung der Raumladungsdichte wurde wieder die HEAVISIDE-Funktion Θ verwendet, da sich die Ladung nur im Bereich $0 \le r \le a$ befindet. Entsprechend gilt im Inneren sowie außerhalb der Ladungsverteilung

Innenbereich, $r \le a$		*Außenbereich, $r > a$*		
$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}\right) = -\frac{\varrho_0}{\varepsilon}$		$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}\right) = 0$		
$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}\right) = -\frac{\varrho_0}{\varepsilon}r^2$		$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}\right) = 0$	$\Big\vert\int \mathrm{d}r$	
$r^2\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} = -\frac{\varrho_0}{\varepsilon}\frac{r^3}{3} + C_1$		$r^2\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} = C_3$		
$\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} = -\frac{\varrho_0}{\varepsilon}\frac{r}{3} + \frac{C_1}{r^2}$		$\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} = \frac{C_3}{r^2}$	$\Big\vert\int \mathrm{d}r$	
$\Phi_i(r) = -\frac{\varrho_0}{\varepsilon}\frac{r^2}{6} - \frac{C_1}{r} + C_2$		$\Phi_a(r) = -\frac{C_3}{r} + C_4$		

mit den noch zu bestimmenden Integrationskonstanten $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1..4)$. Es muss nun $\underline{C_1 = 0}$ sein, da das Potential im Raumladungsmittelpunkt bei $r = 0$ sonst gegen unendlich streben würde. Aus der Forderung, dass Φ_a für $r \to \infty$ verschwinden soll, folgt gleichfalls $\underline{C_4 = 0}$. Weiterhin darf das Potential an der Oberfläche der Ladungsverteilung nicht unstetig sein, woraus man die Relation

$$\Phi_i(r{=}a) = -\frac{\varrho_0}{\varepsilon}\frac{a^2}{6} + C_2 = -\frac{C_3}{a} = \Phi_a(r{\to}a) \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = \frac{\varrho_0}{\varepsilon}\frac{a^2}{6} - \frac{C_3}{a}$$

erhält. Die vierte Bedingung ergibt sich aus der Stetigkeit des elektrischen Feldes

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r = \begin{cases} \frac{\varrho_0}{\varepsilon}\frac{r}{3}\vec{e}_r & : \quad r \le a \\ -\frac{C_3}{r^2}\vec{e}_r & : \quad r > a \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad E_i(r{=}a) = \frac{\varrho_0}{\varepsilon}\frac{a}{3} = -\frac{C_3}{a^2} = E_a(r{\to}a)$$

Damit berechnet man die Konstanten C_2 und C_3 zu

$$C_3 = -\frac{\varrho_0}{\varepsilon}\frac{a^3}{3} \qquad\qquad C_2 = \frac{\varrho_0}{\varepsilon}\left(\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{3}\right) = \frac{\varrho_0}{\varepsilon}\frac{a^2}{2}$$

und für das Potential und die elektrische Feldstärke folgt schließlich

$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\varrho_0}{\varepsilon}\left(\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{r^2}{6}\right) & : \quad r \le a \\ \dfrac{\varrho_0}{\varepsilon}\dfrac{a^3}{3r} & : \quad r > a \end{cases} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\varrho_0}{3\varepsilon}\vec{r} & : \quad r \le a \\ \dfrac{\varrho_0}{3\varepsilon}\left(\dfrac{a}{r}\right)^3\vec{r} & : \quad r > a \end{cases}$$

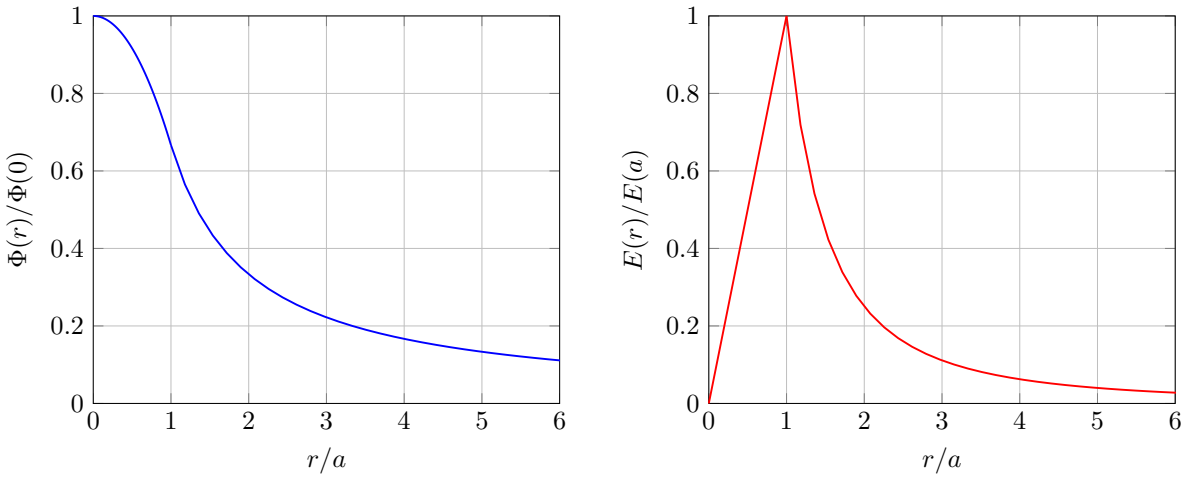


Abbildung 6.1: Normierte Verläufe des elektrischen Potentials $\Phi(\frac{r}{a})$ und der Feldstärke $E(\frac{r}{a})$

7 Elektrostatik - Spiegelungsprinzip

7.1 Punktladung über leitender Ebene, influenzierte Ladung

Zur Bestimmung des elektrischen Feldes $\vec{E}$ der Punktladung $+Q$ am Ort $\vec{r}'_+ = a\vec{e}_z$ über der leitenden xy-Ebene nimmt man entsprechend des Spiegelungsprinzips eine gleich große Ladung mit entgegengesetztem Vorzeichen $-Q$ auf der gegenüber liegenden Seite, d.h. im negativen z-Halbraum bei $\vec{r}'_- = -a\vec{e}_z$ an und berechnet das Gesamtfeld aus der Superposition beider Einzelfelder.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[Q\frac{\vec{r}-\vec{r}'_+}{|\vec{r}-\vec{r}'_+|^3} - Q\frac{\vec{r}-\vec{r}'_-}{|\vec{r}-\vec{r}'_-|^3}\right] = \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+(z-a)\vec{e}_z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}^3} - \frac{x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+(z+a)\vec{e}_z}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}^3}\right]}$$

Dieses Feld ist allerdings nur im oberen Halbraum ($z \geq 0$) definiert, da es sich bei der Konstruktion der Spiegelladung unterhalb der leitenden Ebene lediglich um eine gedankliche Erweiterung als Hilfe zur Berechnung des Feldes im Raum der Punktladung handelt. Tatsächlich ist die elektrische Feldstärke im Bereich $z < 0$ überall Null.

Der Ansatz zur Berechnung der in der leitenden Ebene influenzierten Flächenladung leitet sich aus den Maxwellschen Gleichungen unter Nutzung des Gaussschen Integralsatzes wie folgt her

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon \operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) &= \varrho_{\mathrm{V}}(\vec{r}') = \varrho_{\mathrm{F}}(\vec{r}')\delta(z) \\ \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}V = \oiint\limits_{\partial V}\vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{A} &= \frac{1}{\varepsilon}\iiint\limits_V \varrho_{\mathrm{V}}(\vec{r}')\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{A'}\varrho_{\mathrm{F}}(\vec{r}')\mathrm{d}A \end{aligned}$$

Als geschlossenes Integrationsvolumen wählt man nun einen infinitesimal dünnen Zylinder, welcher die Flächenladung auf der Ebene einschließt. Die Mantelfläche liefert somit keinen Beitrag, sodass eine Integration über Grund- und Deckfläche verbleibt (Abbildung 7.1).

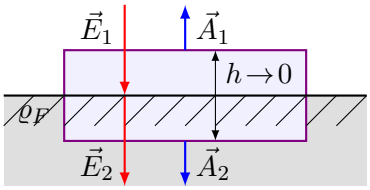


Abbildung 7.1: Integration über Zylindervolumen an der Grenzschicht der leitenden Ebene

Da das elektrische Feld $\vec{E}_2$ unterhalb der leitenden Ebene Null ist, kann man schließlich schreiben

$$\oiint\limits_{\partial V}\vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \vec{E}_1\vec{A}_1 + \vec{E}_2\vec{A}_2 \overset{\vec{A}_2=-\vec{A}_1}{=} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\vec{n}A = \frac{\varrho_{\mathrm{F}}}{\varepsilon}A \quad \Rightarrow \quad \underline{\varrho_{\mathrm{F}} = \varepsilon\vec{E}_1\vec{n} = \varepsilon\vec{E}_{\mathrm{F}}\vec{n}}$$

wobei $\vec{n}$ den Normaleneinheitsvektor und $\vec{E}_{\mathrm{F}}$ das Feld an einem Ort innerhalb der Ebene bezeichnet. Im vorliegenden Fall berechnet sich die influenzierte Flächenladung also zu

$$\varrho_{\mathrm{F,infl}} = \varepsilon\vec{E}(z=0)\vec{e}_z = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{-a}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}^3} - \frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}^3}\right] = \underline{-\frac{Q}{2\pi}\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}^3}}$$

Um die influenzierte Gesamtladung Q_{infl} zu erhalten, muss die Flächenladungsdichte schließlich noch über den Bereich der xy-Ebene integriert werden.

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{infl}} &= \iint\limits_{A'}\varrho_{\mathrm{F,infl}}\mathrm{d}A' = -\frac{Qa}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+a^2}^3} \overset{x'^2+y'^2=\varrho'^2}{=} -\frac{Qa}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\varrho'\mathrm{d}\varrho'\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\varrho'^2+a^2}^3} \\ &\overset{t:=\varrho'^2+a^2}{=} -\frac{Qa}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_{t(0)}^{t(\infty)}\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}^3} = -\frac{Qa}{2}\left[-\frac{2}{\sqrt{\varrho'^2+a^2}}\right]_0^{\infty} = Qa\left(0-\frac{1}{a}\right) = \underline{-Q} \end{aligned}$$

7.2 Punktladung in einer rechtwinkligen Ecke aus leitendem Material

Um das elektrische Feld der Punktladung $+Q$ am Ort $P_1^+(a,b,0)$ vor der leitenden xz- und yz-Ebene zu berechnen, konstruiert man drei Spiegelladungen $-Q$ am Punkt $P_1^-(-a,b,0)$ und $P_2^-(a,-b,0)$ bzw. $+Q$ am Punkt $P_2^+(-a,-b,0)$. Für die Ortsvektoren gilt dann

$$\vec{r}'_{+1/2} = \pm\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}'_{-1/2} = \pm\begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}-\vec{r}'_{+1/2} = \begin{pmatrix} x\mp a \\ y\mp b \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{r}-\vec{r}'_{-1/2} = \begin{pmatrix} x\mp a \\ y\pm b \\ z \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich durch Superposition der von den vier Ladungen ausgehenden Einzelfelder

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[+Q\sum_{i=1}^{2}\frac{\vec{r}-\vec{r}'_{+i}}{|\vec{r}-\vec{r}'_{+i}|^3} - Q\sum_{i=1}^{2}\frac{\vec{r}-\vec{r}'_{-i}}{|\vec{r}-\vec{r}'_{-i}|^3}\right] \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{(x-a)\vec{e}_x+(y-b)\vec{e}_y+z\vec{e}_z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}^3} + \frac{(x+a)\vec{e}_x+(y+b)\vec{e}_y+z\vec{e}_z}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}^3}\right. \\
&\qquad \left.\underline{-\frac{(x-a)\vec{e}_x+(y+b)\vec{e}_y+z\vec{e}_z}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}^3} - \frac{(x+a)\vec{e}_x+(y-b)\vec{e}_y+z\vec{e}_z}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}^3}}\right] \qquad (x,y\geq 0)
\end{aligned}$$

Analog zu Aufgabe 7.1 bestimmt sich die in der yz-Ebene influenzierte Flächenladungsdichte zu

$$\begin{aligned}
\varrho_{\mathrm{F,infl}}\big|_{yz} &= \varepsilon\vec{E}(x=0)\vec{e}_x \\
&= \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{-a}{\sqrt{a^2+(y-b)^2+z^2}^3}+\frac{a}{\sqrt{a^2+(y+b)^2+z^2}^3}-\frac{-a}{\sqrt{a^2+(y+b)^2+z^2}^3}-\frac{a}{\sqrt{a^2+(y-b)^2+z^2}^3}\right] \\
&= \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{-2a}{\sqrt{a^2+(y-b)^2+z^2}^3}+\frac{2a}{\sqrt{a^2+(y+b)^2+z^2}^3}\right] \\
&= \underline{\frac{Qa}{2\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+(y+b)^2+z^2}^3}-\frac{1}{\sqrt{a^2+(y-b)^2+z^2}^3}\right]}
\end{aligned}$$

und die in der xz-Ebene influenzierte Flächenladungsdichte zu

$$\begin{aligned}
\varrho_{\mathrm{F,infl}}\big|_{xz} &= \varepsilon\vec{E}(y=0)\vec{e}_y \\
&= \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{-b}{\sqrt{(x-a)^2+b^2+z^2}^3}+\frac{b}{\sqrt{(x+a)^2+b^2+z^2}^3}-\frac{b}{\sqrt{(x-a)^2+b^2+z^2}^3}-\frac{-b}{\sqrt{(x+a)^2+b^2+z^2}^3}\right] \\
&= \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{-2b}{\sqrt{(x-a)^2+b^2+z^2}^3}+\frac{2b}{\sqrt{(x+a)^2+b^2+z^2}^3}\right] \\
&= \underline{\frac{Qb}{2\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+b^2+z^2}^3}-\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+b^2+z^2}^3}\right]}
\end{aligned}$$

7.3 Punktladung in einem rechtwinkligen Luftspalt aus leitendem Material

Das Skalarpotential der Punktladung $+Q$ am Ort $P(a, b, 0)$ innerhalb des Luftspaltes (Breite c) eines leitenden Körpers berechnet sich wieder mittels Superposition der von der Ladung selbst sowie allen Spiegelladungen hervorgerufenen Einzelpotentiale. Die Spiegelladungen konstruiert man jeweils durch eine Spiegelung an der yz- und $x=c$-Ebene sowie der xz-Ebene. Hierbei ist zu beachten, dass aufgrund der beiden gegenüber stehenden leitenden Ebenen durch Spiegelung von Spiegelladungen letztlich eine unendliche Anzahl Ladungen erforderlich ist (Abbildung 7.2).

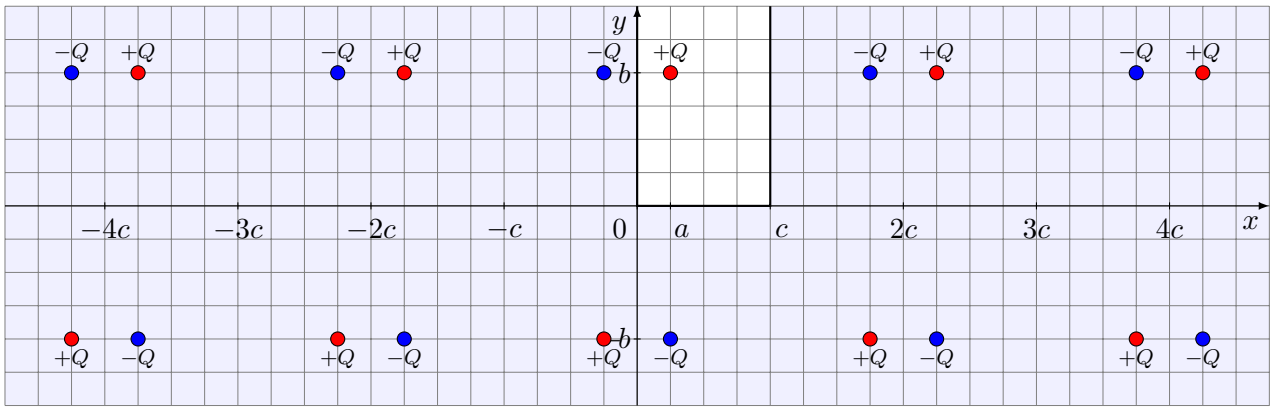


Abbildung 7.2: Konstruktion der Spiegelladungen der im Luftspalt befindlichen Punktladung

Die Punktladungen befinden sich im oberen Halbraum ($y' = b$, $z' = 0$) bei

$$
\begin{array}{lll}
\boxed{+Q} & x' = a & x' = \quad 2c + a, \quad 4c + a, \quad 6c + a, \ldots, \quad 2nc + a, \ldots \\
 & & x' = -2c + a, -4c + a, -6c + a, \ldots, -2nc + a, \ldots \\
\boxed{-Q} & x' = -a & x' = \quad 2c - a, \quad 4c - a, \quad 6c - a, \ldots, \quad 2nc - a, \ldots \\
 & & x' = -2c - a, -4c - a, -6c - a, \ldots, -2nc - a, \ldots
\end{array}
$$

und im unteren Halbraum ($y' = -b$, $z' = 0$) an den Stellen

$$
\begin{array}{lll}
\boxed{+Q} & x' = -a & x' = \quad 2c - a, \quad 4c - a, \quad 6c - a, \ldots, \quad 2nc - a, \ldots \\
 & & x' = -2c - a, -4c - a, -6c - a, \ldots, -2nc - a, \ldots \\
\boxed{-Q} & x' = a & x' = \quad 2c + a, \quad 4c + a, \quad 6c + a, \ldots, \quad 2nc + a, \ldots \\
 & & x' = -2c + a, -4c + a, -6c + a, \ldots, -2nc + a, \ldots
\end{array}
$$

womit man für den Abstand zwischen Aufpunkt und Quellpunkt schreiben kann

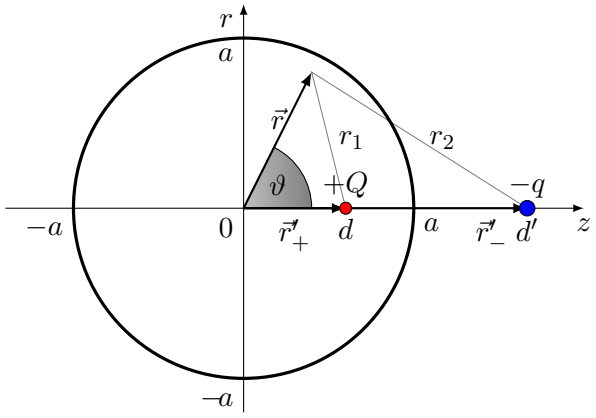
$$
\begin{aligned}
\left|\vec{r} - \vec{r}'_{n+}\right|_{y'=\pm b} &= \sqrt{(x - 2nc \mp a)^2 + (y \mp b)^2 + z^2} \\
\left|\vec{r} - \vec{r}'_{n-}\right|_{y'=\pm b} &= \sqrt{(x - 2nc \pm a)^2 + (y \mp b)^2 + z^2} \qquad \text{mit } n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Das Gesamtpotential im Luftspalt ($0 \le x \le c$, $y \ge 0$) ist schließlich

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{+Q}{|\vec{r} - \vec{r}'_{n+}|_{y'=b}} + \frac{+Q}{|\vec{r} - \vec{r}'_{n+}|_{y'=-b}}\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{-Q}{|\vec{r} - \vec{r}'_{n-}|_{y'=b}} + \frac{-Q}{|\vec{r} - \vec{r}'_{n-}|_{y'=-b}}\right)\right] \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-2nc-a)^2+(y-b)^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-2nc+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{\sqrt{(x-2nc+a)^2+(y-b)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-2nc-a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]
\end{aligned}
$$

7.4 Punktladung innerhalb einer leitenden und geerdeten Hohlkugel

Für die auf der z-Achse im Inneren einer geerdeten Hohlkugel befindliche Punktladung $+Q$ kann nach dem Spiegelungsprinzip eine negative Ladung $-q$ außerhalb der Kugel konstruiert werden. Diese befindet sich aufgrund der Symmetrie ebenfalls auf der z-Achse am Ort $\vec{r}'_-$ (Abbildung 7.3).



$+Q$ bei $P(0,0,d)$, $-q$ bei $Q(0,0,d')$

$\vec{r}'_+ = d\vec{e}_z \qquad \vec{r}'_- = d'\vec{e}_z$

$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = r\vec{e}_r$

$$r_1 = |\vec{r} - \vec{r}'_+| = \sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2} = \sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\vartheta}$$

$$r_2 = |\vec{r} - \vec{r}'_-| = \sqrt{x^2+y^2+(z-d')^2} = \sqrt{r^2+d'^2-2rd'\cos\vartheta}$$

Abbildung 7.3: Punktladung $+Q$ am Punkt P innerhalb einer leitenden geerdeten Hohlkugel

Den Ort der Spiegelladung $-q$ bzw. ihren Abstand d' zum Kugelmittelpunkt bestimmt man durch Inversion am Kreis (Kreisspiegelung) gemäß der Abbildung

$$\vec{r}'_- = \overrightarrow{OQ} = \frac{R^2}{|\overrightarrow{OP}|^2}\overrightarrow{OP} = \frac{a^2}{|\vec{r}'_+|^2}\vec{r}'_+ = \frac{a^2}{d^2}d\vec{e}_z = d'\vec{e}_z \qquad \Rightarrow \qquad \underline{d' = \frac{a^2}{d}}$$

Die Größe ihrer Ladung lässt sich aus der Bedingung des Potentials $\Phi(r=a)=0$ auf der Oberfläche der geerdeten Kugel ermitteln:

$$\Phi(r,\vartheta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{+Q}{|\vec{r}-\vec{r}'_+|} - \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'_-|}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\vartheta}} - \frac{q}{Q}\frac{1}{\sqrt{r^2+d'^2-2rd'\cos\vartheta}}\right]$$

$$\Phi(a,\vartheta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\vartheta}} - \frac{q}{Q}\frac{1}{\sqrt{a^2+d'^2-2ad'\cos\vartheta}}\right] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad q = Q\sqrt{\frac{a^2+d'^2-2ad'\cos\vartheta}{a^2+d^2-2ad\cos\vartheta}} = Q\sqrt{\frac{a^2\left(1+\left(\frac{a}{d}\right)^2-2\left(\frac{a}{d}\right)\cos\vartheta\right)}{d^2\left(\left(\frac{a}{d}\right)^2+1-2\left(\frac{a}{d}\right)\cos\vartheta\right)}} = \underline{Q\frac{a}{d}}$$

Damit ist das elektrische Skalarpotential insgesamt

$$\Phi(r,\vartheta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\vartheta}} - \frac{a}{d}\frac{1}{\sqrt{r^2+d'^2-2rd'\cos\vartheta}}\right] = \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{a}{d}\frac{1}{r_2}\right]} \qquad (r \le a)$$

Die elektrische Feldstärke im Inneren folgt wiederum aus dem Gradienten des Potentials

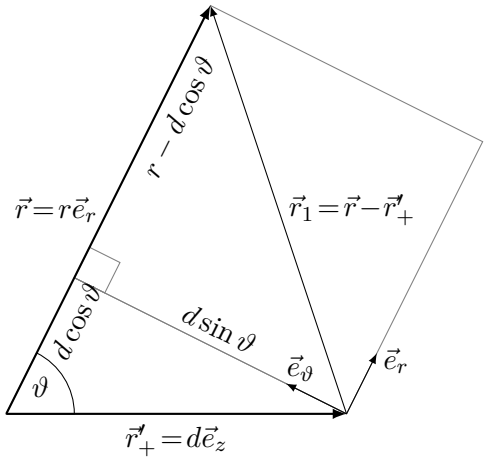
$$\vec{E}(r,\vartheta) = -\operatorname{grad}\Phi(r,\vartheta) = -\left[\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}}_{=0}\vec{e}_\varphi\right]$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{2r-2d\cos\vartheta}{2\sqrt{\ldots}^3} + \frac{a}{d}\frac{2r-2d'\cos\vartheta}{2\sqrt{\ldots}^3}\right] = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{r-d\cos\vartheta}{r_1^3} - \frac{a}{d}\frac{r-d'\cos\vartheta}{r_2^3}\right]$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{2rd\sin\vartheta}{2\sqrt{\ldots}^3} + \frac{a}{d}\frac{2rd'\sin\vartheta}{2\sqrt{\ldots}^3}\right] = -\frac{Qr}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{d\sin\vartheta}{r_1^3} - \frac{a}{d}\frac{d'\sin\vartheta}{r_2^3}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(r,\vartheta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{(r-d\cos\vartheta)\vec{e}_r + d\sin\vartheta\vec{e}_\vartheta}{r_1^3} - \frac{a}{d}\frac{(r-d'\cos\vartheta)\vec{e}_r + d'\sin\vartheta\vec{e}_\vartheta}{r_2^3}\right] = \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{a}{d}\frac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right]}$$

Letztere Vereinfachung folgt aus den geometrischen Beziehungen zwischen den Ortsvektoren, wie man sich leicht anhand von Abbildung 7.4 verdeutlicht:



$$\vec{r}_1 = (r - d\cos\vartheta)\vec{e}_r + d\sin\vartheta\vec{e}_\vartheta$$

analog ist

$$\vec{r}_2 = (r - d'\cos\vartheta)\vec{e}_r + d'\sin\vartheta\vec{e}_\vartheta$$

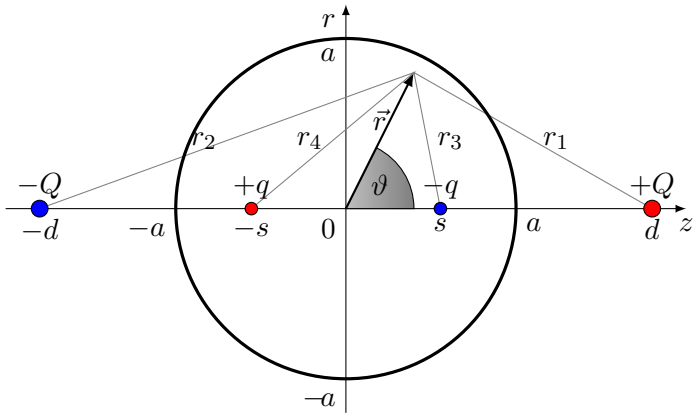
Abbildung 7.4: Formulierung der Abstandsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ in Kugelkoordinaten

Einfacher lässt sich die Gradientenbildung zur Berechnung der elektrischen Feldstärke allerdings in kartesischen Koordinaten durchführen:

$$\begin{aligned}\vec{E}(x,y,z) &= -\operatorname{grad}\Phi(x,y,z) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{a}{d}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d')^2}}\right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z-d)\vec{e}_z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}^3} - \frac{a}{d}\frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z-d')\vec{e}_z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d')^2}^3}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{a}{d}\frac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right]\end{aligned}$$

7.5 Punktladungen und Hohlkugel 1

Skalarpotential und elektrische Feldstärke der vorliegenden Anordnung zweier Punktladungen außerhalb einer leitenden Hohlkugel berechnet man ganz analog zur Aufgabe 7.4. Die Orte der beiden Spiegelladungen im Inneren folgen wieder aus einer Kreisspiegelung, womit sich die in Abbildung 7.5 dargestellte Konstellation mit $s = \frac{a^2}{d}$ ergibt. Ebenso kann die Größe der Spiegelladungen auf gleiche Weise zu $q = Q\frac{a}{d}$ ermittelt werden.



Punktladung $\pm Q$ am Ort $\vec{r}'_{\pm} = \pm d\vec{e}_z$

Spiegelladung $\pm q$ am Ort $\vec{r}'_{\pm S} = \mp s\vec{e}_z$

$$\vec{r}'_{\pm S} = \frac{a^2}{|\vec{r}'_{\mp}|^2}\vec{r}'_{\mp} = \mp\frac{a^2}{d}\vec{e}_z = \mp s\vec{e}_z$$

$$r_{1/2} = |\vec{r} - \vec{r}'_{\pm}| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp d)^2} = \sqrt{r^2 + d^2 \mp 2rd\cos\vartheta}$$

$$r_{3/4} = |\vec{r} - \vec{r}'_{\mp S}| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp s)^2} = \sqrt{r^2 + s^2 \mp 2rs\cos\vartheta}$$

Abbildung 7.5: Punktladungen $+Q$ und $-Q$ bei $z = d$ bzw. $z = -d$ außerhalb einer leitenden Hohlkugel

Das Gesamtpotential lautet dementsprechend

$$\begin{aligned}\Phi(r,\vartheta) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{+Q}{|\vec{r} - \vec{r}'_{+}|} + \frac{-Q}{|\vec{r} - \vec{r}'_{-}|} + \frac{-q}{|\vec{r} - \vec{r}'_{-S}|} + \frac{+q}{|\vec{r} - \vec{r}'_{+S}|}\right] \\ &= \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{a}{d}\frac{1}{r_3} + \frac{a}{d}\frac{1}{r_4}\right]} \qquad (r \geq a)\end{aligned}$$

und die elektrische Feldstärke außerhalb ist

$$\vec{E}(r,\vartheta) = -\operatorname{grad}\Phi(r,\vartheta) = \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \frac{a}{d}\frac{\vec{r}_3}{r_3^3} + \frac{a}{d}\frac{\vec{r}_4}{r_4^3}\right]}$$

Für den Fall, dass die Hohlkugel nicht geerdet ist und das Oberflächenpotential $\Phi_K = \Phi_0$ besitzt, modifiziert man obige Ergebnisse und nimmt eine zusätzliche Punktladung Q' im Ursprung an, welche auf der Kugeloberfläche das vorgegebene Potential hervorruft.

$$\Phi(a,\vartheta) = \underbrace{\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{a}{d}\frac{1}{r_3} + \frac{a}{d}\frac{1}{r_4}\right]_{r=a}}_{=0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q'}{r}\bigg|_{r=a} \stackrel{!}{=} \Phi_0 \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 4\pi\varepsilon\Phi_0 a$$

$$\Rightarrow \qquad \Phi(r,\vartheta) = \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{a}{d}\frac{1}{r_3} + \frac{a}{d}\frac{1}{r_4}\right] + \frac{a}{r}\Phi_0} \qquad (r \geq a)$$

$$\vec{E}(r,\vartheta) = \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \frac{a}{d}\frac{\vec{r}_3}{r_3^3} + \frac{a}{d}\frac{\vec{r}_4}{r_4^3}\right] + a\frac{\vec{r}}{r^3}\Phi_0}$$

7.6 Punktladungen und Hohlkugel 2

Wie in den vorangegangenen beiden Aufgaben ist für die gegebene Anordnung zunächst die Position und Größe der Spiegelladungen q_1 und q_2 von Q_1 und Q_2 durch Kreisspiegelung zu bestimmen. Diese befinden sich im Inneren der Hohlkugel bei $y = \frac{a}{2}$ bzw. $y = \frac{a}{5}$ und haben eine Ladung von $q_1 = -\frac{Q_1}{2}$ bzw. $q_2 = \frac{2Q_1}{5}$ (Abbildung 7.6).

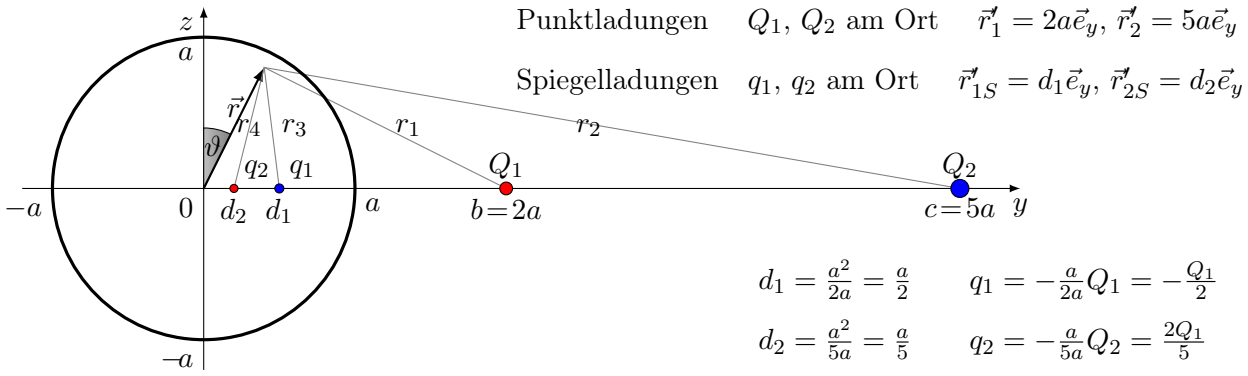


Abbildung 7.6: Punktladungen $Q_1 > 0$ und $Q_2 = -2Q_1$ außerhalb einer geerdeten Hohlkugel

Das gesamte elektrische Feld im Außenraum erhält man durch Superposition der von den einzelnen Ladungen erzeugten Felder und es gilt

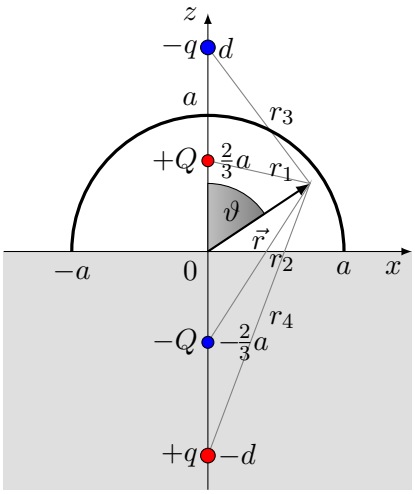
$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[Q_1\frac{\vec{r}-\vec{r}'_1}{|\vec{r}-\vec{r}'_1|^3} + Q_2\frac{\vec{r}-\vec{r}'_2}{|\vec{r}-\vec{r}'_2|^3} + q_1\frac{\vec{r}-\vec{r}'_{1S}}{|\vec{r}-\vec{r}'_{1S}|^3} + q_2\frac{\vec{r}-\vec{r}'_{2S}}{|\vec{r}-\vec{r}'_{2S}|^3}\right] \\
&= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{\vec{r}-2a\vec{e}_y}{|\vec{r}-2a\vec{e}_y|^3} - 2\frac{\vec{r}-5a\vec{e}_y}{|\vec{r}-5a\vec{e}_y|^3} - \frac{1}{2}\frac{\vec{r}-\frac{a}{2}\vec{e}_y}{|\vec{r}-\frac{a}{2}\vec{e}_y|^3} + \frac{2}{5}\frac{\vec{r}-\frac{a}{5}\vec{e}_y}{|\vec{r}-\frac{a}{5}\vec{e}_y|^3}\right] \qquad (r \geq a)
\end{aligned}$$

Die Kraft auf die Ladung Q_1 berechnet sich nun aus der Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}'_1)$ am Ort der Ladung, wobei nur das von den übrigen (Spiegel-)Ladungen und nicht das von ihr selbst hervorgerufene elektrostatische Feld berücksichtigt werden muss. Somit folgt

$$\begin{aligned}
\vec{F} = Q_1\vec{E}(\vec{r}'_1) &= \frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon}\left[-2\frac{\vec{r}'_1-\vec{r}'_2}{|\vec{r}'_1-\vec{r}'_2|^3} - \frac{1}{2}\frac{\vec{r}'_1-\vec{r}'_{1S}}{|\vec{r}'_1-\vec{r}'_{1S}|^3} + \frac{2}{5}\frac{\vec{r}'_1-\vec{r}'_{2S}}{|\vec{r}'_1-\vec{r}'_{2S}|^3}\right] \\
&= \frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon}\left[-2\frac{(2a-5a)\vec{e}_y}{(2a-5a)^3} - \frac{1}{2}\frac{(2a-\frac{a}{2})\vec{e}_y}{(2a-\frac{a}{2})^3} + \frac{2}{5}\frac{(2a-\frac{a}{5})\vec{e}_y}{(2a-\frac{a}{5})^3}\right] \\
&= \frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{2}{(3a)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{3a}{2})^2} + \frac{2}{5}\frac{1}{(\frac{9a}{5})^2}\right]\vec{e}_y \\
&= \frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{(3a)^2}\left[2 - \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{2}{5}\cdot\frac{25}{9}\right]\vec{e}_y = \underline{\frac{5}{162}\frac{Q_1^2}{\pi\varepsilon a^2}\vec{e}_y}
\end{aligned}$$

7.7 Punktladung innerhalb einer Hohlkugelhälfte über leitender Ebene

Befindet sich eine Punktladung Q auf der z-Achse innerhalb einer leitfähigen Hohlkugelhälfte, welche leitend mit der darunter liegenden und geerdeten xy-Ebene verbunden ist, so konstruiert man ihre Spiegelladungen einerseits durch eine Spiegelung an der Ebene und andererseits durch Kreisspiegelung an der Halbkugelschale, sodass die in Abbildung 7.7 dargestellte Anordnung entsteht.



(Spiegel-)Ladungen $\pm Q$ am Ort $\vec{r}'_{\pm} = \pm\frac{2}{3}a\vec{e}_z$

$\pm q$ am Ort $\vec{r}'_{\pm S} = \mp d\vec{e}_z$

$$d = \frac{a^2}{\frac{2}{3}a} = \frac{3}{2}a \qquad q = \frac{a}{\frac{2}{3}a}Q = \frac{3}{2}Q$$

$$\vec{r}_{1/2} = \vec{r} - \vec{r}'_{\pm} \qquad \vec{r}_{3/4} = \vec{r} - \vec{r}'_{\mp S}$$

Abbildung 7.7: Punktladung Q bei $z = \frac{2}{3}a$ innerhalb einer leitenden Hohlkugelhälfte

Für Potential und elektrische Feldstärke folgt wieder durch Superposition:

$$\Phi(r,\vartheta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{+Q}{r_1} + \frac{-Q}{r_2} + \frac{-q}{r_3} + \frac{+q}{r_4}\right] = \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{3}{2}\frac{1}{r_3} + \frac{3}{2}\frac{1}{r_4}\right]} \qquad (r \le a)$$

$$\vec{E}(r,\vartheta) = -\operatorname{grad}\Phi(r,\vartheta) = \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \frac{3}{2}\frac{\vec{r}_3}{r_3^3} + \frac{3}{2}\frac{\vec{r}_4}{r_4^3}\right]}$$

7.8 Punktladung über einer dielektrischen Grenzschicht

Betrachtet man eine Punktladung Q in einem Dielektrikum der Permittivität ε_1, welche sich im Abstand a auf der positiven z-Achse vor der durch die xy-Ebene gebildeten Grenzschicht zu einem Dielektrikum der Permittivität ε_2 befindet, so lässt sich das elektrische Skalarpotential $\Phi(\vec{r})$ im Punkt $\vec{r} = \varrho\vec{e}_\varrho + z\vec{e}_z$ auf ähnliche Weise wie bei der klassischen Spiegelladungsmethode berechnen. Während die Ermittlung des Bildpunktes weiterhin über die bekannten Transformationen geschieht, sind hier nun neue bzw. veränderte Bildladungen in beiden Medien zu berücksichtigen.

Als Ansatz im oberen Halbraum (mit $z > 0$) formuliert man das Potential Φ_1 als Superposition aus dem Potential der ursprünglichen Punktladung Q und dem Potential einer Bildladung Q^*, welche sich am Ort $\vec{r}_{Q^*} = -a\vec{e}_z$ auf der gegenüberliegenden Seite der Grenzfläche befindet. Dabei nimmt man im gesamten Raum ein Dielektrikum mit der Permittivität ε_1 an.

$$\Phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} + \frac{Q^*}{|\vec{r}-\vec{r}_{Q^*}|}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{Q}{r_1} + \frac{Q^*}{r_2}\right] \qquad \text{mit} \quad r_{1/2} = \sqrt{\varrho^2 + (z \mp a)^2}$$

Für den unteren Halbraum (mit $z < 0$) hingegen wird das Gesamtpotential Φ_2 als Überlagerung der Potentiale der Punktladung Q und einer Bildladung Q^{**} am selben Ort $\vec{r}_Q = \vec{r}_{Q^{**}} = a\vec{e}_z$ in einem Raum, welcher mit einem Dielektrikum der Permittivität ε_2 gefüllt ist, angesetzt.

$$\Phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\left[\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} + \frac{Q^{**}}{|\vec{r}-\vec{r}_{Q^{**}}|}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{Q+Q^{**}}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{Q+Q^{**}}{r_1}$$

Die Bestimmung der Bildladungen Q^* und Q^{**} erfolgt aus den Stetigkeitsbedingungen des Potentials und der elektrischen Feldkomponenten an der Grenzfläche zwischen den beiden Dielektrika bei $z = 0$:

$$\Phi_1(z{=}0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{Q}{\sqrt{\varrho^2+a^2}} + \frac{Q^*}{\sqrt{\varrho^2+a^2}}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\frac{Q+Q^*}{\sqrt{\varrho^2+a^2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{Q+Q^{**}}{\sqrt{\varrho^2+a^2}} = \Phi_2(z{=}0)$$

$$\frac{Q+Q^*}{\varepsilon_1} = \frac{Q+Q^{**}}{\varepsilon_2} \qquad \text{(I)}$$

Eine Auswertung der Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes $E^{\mathrm{t}} = E_\varrho$ liefert das gleiche Ergebnis wie die Stetigkeit des Potentials zuvor. Die zweite Bedingung erhält man daher aus der Stetigkeit der Normalkomponente des elektrischen Verschiebungsfeldes $D^{\mathrm{n}} = D_z$ wie folgt

$$\begin{aligned}
D_1^{\mathrm{n}}(z{=}0) = \varepsilon_1 E_{z1}(z{=}0) &\stackrel{!}{=} \varepsilon_2 E_{z2}(z{=}0) = D_2^{\mathrm{n}}(z{=}0) \\
-\varepsilon_1 \operatorname{grad}\Phi_1(z{=}0)\vec{e}_z = -\varepsilon_1 \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right|_{z=0} &= -\varepsilon_2 \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right|_{z=0} = -\varepsilon_2 \operatorname{grad}\Phi_2(z{=}0)\vec{e}_z \\
\frac{1}{4\pi}\left[Q\frac{z-a}{\sqrt{\varrho^2+(z-a)^2}^3} + Q^*\frac{z+a}{\sqrt{\varrho^2+(z+a)^2}^3}\right]_{z=0} &= \left[\frac{Q+Q^{**}}{4\pi}\frac{z-a}{\sqrt{\varrho^2+(z-a)^2}^3}\right]_{z=0} \\
a\frac{-Q+Q^*}{\sqrt{\varrho^2+a^2}^3} &= -a\frac{Q+Q^{**}}{\sqrt{\varrho^2+a^2}^3} \\
Q - Q^* &= Q + Q^{**} \qquad \text{(II)}
\end{aligned}$$

Aus den Bedingungen (I) und (II) bestimmt man die Bildladungen somit zu

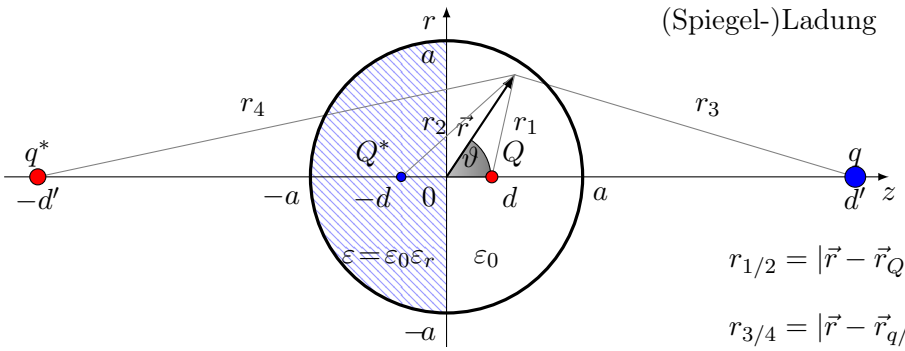
$$Q^* = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}Q \qquad\qquad Q^{**} = -Q^* = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}Q$$

und das Potential in den beiden Halbräumen lautet schließlich

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{1}{r_1} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{r_2}\right] \\
\Phi_2(\vec{r}) &= \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\left[\left(1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)\frac{1}{r_1}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\left[\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{r_1}\right]}
\end{aligned}$$

7.9 Punktladung und Hohlkugel mit Dielektrika

Für die gegebene Anordnung einer Punktladung Q bei $\vec{r}_Q = \frac{a}{3}\vec{e}_z$ innerhalb einer leitenden und geerdeten Hohlkugel vom Radius a, deren eine Hälfte die Permittivität ε_0 aufweist, während die andere mit einem Dielektrikum der Permittivität $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ gefüllt ist, konstruiert man die Ersatzanordnung, wie in Abbildung 7.8 dargestellt, durch dielektrische Spiegelung innerhalb der Kugel und anschließender Kreisspiegelung an der Kugelsphäre.



(Spiegel-)Ladung Q/Q^* am Ort $\vec{r}_{Q/Q^*} = \pm d\vec{e}_z$

q/q^* am Ort $\vec{r}_{q/q^*} = \pm d'\vec{e}_z$

$$d' = \frac{a^2}{d} = \frac{a^2}{\frac{a}{3}} = 3a$$

$$r_{1/2} = |\vec{r} - \vec{r}_{Q/Q^*}| = \sqrt{r^2 + d^2 \mp 2rd\cos\vartheta}$$

$$r_{3/4} = |\vec{r} - \vec{r}_{q/q^*}| = \sqrt{r^2 + d'^2 \mp 2rd'\cos\vartheta}$$

Abbildung 7.8: Punktladung Q bei $z = d = \frac{a}{3}$ innerhalb einer leitenden Hohlkugel mit Dielektrika

Die Größe der beiden außerhalb befindlichen Spiegelladungen berechnet sich nach der aus vorigen Aufgaben gleichen Typs bekannten Beziehung zu $q = -\frac{a}{d}Q = -3Q$ bzw. $q^* = -\frac{a}{d}Q^* = -3Q^*$. Weiterhin erhält man die dielektrische Spiegelladung Q^* mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 7.8 (mit den Permittivitäten $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$), sodass folgt

$$Q^* = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}Q = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon}Q \qquad \Rightarrow \qquad q^* = -3Q^* = -3\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon}Q$$

Das Gesamtpotential in der Kugelhälfte mit $z > 0$ und der Permittivität ε_0 am Punkt $\vec{r} = r\vec{e}_r$ bestimmt sich wiederum durch Superposition der Potentiale von Punktladung und allen Spiegelladungen und ist

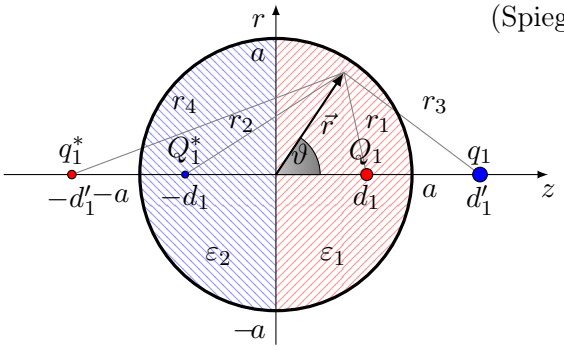
$$\underline{\Phi_1(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon}\frac{1}{r_2} - \frac{3}{r_3} - \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon}\frac{3}{r_4}\right]}$$

Die elektrische Feldstärke folgt letztlich durch Bilden des Gradienten von Φ_1 zu

$$\underline{\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon}\frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - 3\frac{\vec{r}_3}{r_3^3} - 3\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon}\frac{\vec{r}_4}{r_4^3}\right]}$$

7.10 Zwei Punktladungen innerhalb einer geerdeten Kugel mit 2 Dielektrika

Wird in der Anordnung aus Aufgabe 7.9 zur Punktladung $Q_1 = Q$, welche sich nun bei $\vec{r}_{Q_1} = \frac{2a}{3}\vec{e}_z$ im Medium der Permittivität ε_1 befinde, eine weitere Ladung $Q_2 = -Q$ am Punkt $\vec{r}_{Q_2} = -\frac{a}{3}\vec{e}_z$ innerhalb der zweiten, mit einem Dielektrikum der Permittivität ε_2 ausgefüllten Kugelhälfte hinzugenommen, so kann bei der Berechnung des Skalarpotentials auf die vorigen Ergebnisse zurückgegriffen werden und sind lediglich die zusätzlich auftretenden Spiegelladungen zu berücksichtigen. Es werden zunächst nur die Ladung Q_1 und ihre Spiegelladungen betrachtet, die wie in Abbildung 7.9 arrangiert sind.



(Spiegel-)Ladung Q_1/Q_1^* am Ort $\vec{r}_{Q_1/Q_1^*} = \pm d_1\vec{e}_z$

q_1/q_1^* am Ort $\vec{r}_{q_1/q_1^*} = \pm d_1'\vec{e}_z$

$$d_1' = \frac{a^2}{d_1} = \frac{a^2}{\frac{2a}{3}} = \frac{3a}{2}$$

$$r_{1/2} = |\vec{r} - \vec{r}_{Q_1/Q_1^*}| = \sqrt{r^2 + d_1^2 \mp 2rd_1\cos\vartheta}$$

$$r_{3/4} = |\vec{r} - \vec{r}_{q_1/q_1^*}| = \sqrt{r^2 + d_1'^2 \mp 2rd_1'\cos\vartheta}$$

Abbildung 7.9: Konstruktion der Spiegelladungen der Punktladung $Q_1 = Q$ bei $z = d_1 = \frac{2a}{3}$

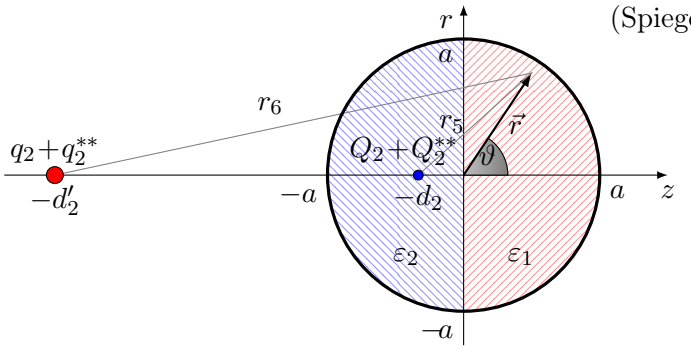
Die beiden Spiegelladungen außerhalb der Kugel berechnen sich dabei gemäß $q_1 = -\frac{a}{d_1}Q_1 = -\frac{3}{2}Q_1$ und $q_1^* = -\frac{a}{d_1}Q_1^* = -\frac{3}{2}Q_1^*$. Für Q_1^* erhält man dagegen

$$Q_1^* = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}Q_1 \qquad \Rightarrow \qquad q_1^* = -\frac{3}{2}Q_1^* = -\frac{3}{2}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}Q_1$$

Als Zwischenergebnis folgt das Potential dieser vier Punktladungen am Ort $\vec{r} = r\vec{e}_r$ im Medium mit der Permittivität ε_1 zu

$$\Phi_{11}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_1^*}{r_2} + \frac{q_1}{r_3} + \frac{q_1^*}{r_4}\right] = \underline{\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{1}{r_1} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{1}{r_2} - \frac{3}{2}\frac{1}{r_3} - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{1}{r_4}\right]}$$

Bei der Konstruktion der Spiegelladungen von Q_2 ist nun zu beachten, dass das Potential im der Ladung gegenüberliegenden Dielektrikum bestimmt werden soll und für die dielektrische Spiegelung daher ein anderer Ansatz zu wählen ist. Mit dem Ergebnis aus Aufgabe 7.8 gelangt man somit zu einer Ladungskonstellation, wie sie Abbildung 7.10 zeigt.



(Spiegel-)Ladung Q_2/Q_2^{**} am Ort $\vec{r}_{Q_2/Q_2^{**}} = -d_2\vec{e}_z$

q_2/q_2^{**} am Ort $\vec{r}_{q_2/q_2^{**}} = -d_2'\vec{e}_z$

$$d_2' = \frac{a^2}{d_2} = \frac{a^2}{\frac{a}{3}} = 3a$$

$$r_5 = |\vec{r} - \vec{r}_{Q_2/Q_2^{**}}| = \sqrt{r^2 + d_2^2 + 2rd_2\cos\vartheta}$$

$$r_6 = |\vec{r} - \vec{r}_{q_2/q_2^{**}}| = \sqrt{r^2 + d_2'^2 + 2rd_2'\cos\vartheta}$$

Abbildung 7.10: Konstruktion der Spiegelladungen der Punktladung $Q_2 = -Q$ bei $z = d_2 = \frac{a}{3}$

Unter Beachtung der Permittivitäten gilt für $Q_2 + Q_2^{**}$ sowie für die Größe der Spiegelladung $q_2 + q_2^{**}$

$$Q_2 + Q_2^{**} = \left(1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right) Q_2 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q_2 \qquad \Rightarrow \qquad q_2 + q_2^{**} = -\frac{a}{d_2}(Q_2 + Q_2^{**}) = -3\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q_2$$

Das von dieser Ladungsverteilung im Medium 1 hervorgerufene Potential lautet demnach

$$\Phi_{12}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{Q_2 + Q_2^{**}}{r_5} + \frac{q_2 + q_2^{**}}{r_6}\right] = \underline{\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{1}{r_5} - \frac{6\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{1}{r_6}\right]}$$

und man erhält als Gesamtpotential durch Addition beider Teilergebnisse

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\vec{r}) &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{1}{r_1} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{1}{r_2} - \frac{3}{2}\frac{1}{r_3} - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{1}{r_4}\right] + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{1}{r_5} - \frac{6\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{1}{r_6}\right] \\
&= \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{1}{r_1} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{1}{r_2} - \frac{3}{2}\frac{1}{r_3} - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{1}{r_4} - \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{1}{r_5} + \frac{6\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{1}{r_6}\right]}
\end{aligned}$$

bzw. für die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\Phi_1(\vec{r}) = \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \frac{3}{2}\frac{\vec{r}_3}{r_3^3} - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{\vec{r}_4}{r_4^3} - \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{\vec{r}_5}{r_5^3} + \frac{6\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{\vec{r}_6}{r_6^3}\right]}$$

8 Elektrostatik - Elektrisches Dipolmoment

8.1 Elektrischer Dipol im Feld einer Punktladung (Näherung Punktdipol)

Die Ladungen $Q_1 = Q$ und $Q_2 = -Q$ in den Punkten $P_1(a, 0, \frac{l}{2})$ und $P_2(a, 0, -\frac{l}{2})$ bilden zusammen einen parallel zur z-Achse ausgerichteten elektrischen Dipol mit Dipolmoment $\vec{p} = Ql\vec{e}_z$. Im Feld der Punktladung Q_0 im Koordinatenursprung wirkt auf die beiden Ladungen des Dipols eine Kraft, die sich nach dem COULOMBschen Gesetz berechnen lässt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= Q_0 \sum_i \vec{E}(\vec{r}_i) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon}\left[Q_1\frac{\vec{r}_1-\vec{r}}{|\vec{r}_1-\vec{r}|^3} + Q_2\frac{\vec{r}_2-\vec{r}}{|\vec{r}_2-\vec{r}|^3}\right] = \frac{Q_0Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{\vec{r}_1-\vec{r}}{|\vec{r}_1-\vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_2-\vec{r}}{|\vec{r}_2-\vec{r}|^3}\right] \\
&= \frac{Q_0Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{a\vec{e}_x + \frac{l}{2}\vec{e}_z}{\sqrt{a^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}^3} - \frac{a\vec{e}_x - \frac{l}{2}\vec{e}_z}{\sqrt{a^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}^3}\right] = \frac{Q_0Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{l^2}{4}}^3}\left[a\vec{e}_x + \frac{l}{2}\vec{e}_z - a\vec{e}_x + \frac{l}{2}\vec{e}_z\right] \\
&= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon}\frac{Ql\vec{e}_z}{\sqrt{a^2+\frac{l^2}{4}}^3} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{p}}{\sqrt{a^2+\frac{l^2}{4}}^3} \overset{l\mapsto 0}{\approx} \underline{\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{p}}{a^3}}
\end{aligned}$$

Für den Punktdipol, d.h. beim Grenzübergang des Abstandes $l \to 0$ zwischen den Ladungen Q_1 und Q_2 mit der zusätzlichen Forderung, dass $p = Ql$ konstant bleibt, geht der Abstand des Dipols von der Punktladung Q_0 in den radialen Abstand a über.

8.2 Punktladung im Feld eines elektrischen Dipols

Das vom Dipol mit Dipolmoment $\vec{p} = p\vec{e}_z$ am Ort $\vec{r}_\mathrm{D} = a\vec{e}_z$ ausgehende elektrische Feld ist allgemein definiert durch

$$\vec{E}_\mathrm{D}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[3\frac{(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right]$$

Mit dem Aufpunktvektor der Punktladung $\vec{r}_Q = 2a\vec{e}_y + 3a\vec{e}_z$ schreibt sich der Abstandsvektor als $\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_\mathrm{D} = 2a(\vec{e}_y + \vec{e}_z)$, der Abstand ist $r = 2a\sqrt{2}$ und es folgt für die Kraft auf die Ladung Q

$$\begin{aligned}
\vec{F} = Q\vec{E}_\mathrm{D}(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[3\frac{(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[3\frac{(2a(\vec{e}_y+\vec{e}_z)p\vec{e}_z)2a(\vec{e}_y+\vec{e}_z)}{\left(2a\sqrt{2}\right)^5} - \frac{p\vec{e}_z}{\left(2a\sqrt{2}\right)^3}\right] \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{p}{\left(2a\sqrt{2}\right)^3}\left[3\frac{(2a)^2(\vec{e}_y+\vec{e}_z)}{\left(2a\sqrt{2}\right)^2} - \vec{e}_z\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{p}{16\sqrt{2}a^3}\left[3\frac{\vec{e}_y+\vec{e}_z}{2} - \vec{e}_z\right] \\
&= \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{p}{32\sqrt{2}a^3}(3\vec{e}_y + \vec{e}_z)}
\end{aligned}$$

8.3 Kreisförmige Doppelschicht mit konstanter Dipolmomentdichte

Das Skalarpotential auf der z-Achse am Ort $\vec{r} = z\vec{e}_z$, hervorgerufen durch die in der xy-Ebene befindliche kreisförmige Schicht mit Radius a und der Dipolmomentdichte $\vec{m}(\vec{r}') = m_0\vec{e}_z$, bestimmt sich mit dem Quellpunktvektor $\vec{r}' = \varrho'\vec{e}_\varrho$ gemäß

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\limits_V \frac{\vec{m}(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^a\int\limits_0^{2\pi}\frac{m_0\delta(z')\vec{e}_z(z\vec{e}_z-\varrho'\vec{e}_\varrho)}{\sqrt{z^2+\varrho'^2}^3}\varrho'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}\varrho'\mathrm{d}z' \\ &= \frac{m_0}{2\varepsilon}z\int\limits_0^a\frac{\varrho'\mathrm{d}\varrho'}{\sqrt{z^2+\varrho'^2}^3}\overset{t:=z^2+\varrho'^2}{=}\frac{m_0}{2\varepsilon}\frac{z}{2}\int\limits_{t(0)}^{t(a)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}^3} = \frac{m_0}{2\varepsilon}z\left[\frac{-1}{\sqrt{t}}\right]_{t(0)}^{t(a)} = \underline{-\frac{m_0}{2\varepsilon}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}-\frac{z}{\sqrt{z^2}}\right)}\end{aligned}$$

Die elektrische Feldstärke ergibt sich aus dem Gradienten des Potentials zu

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= -\operatorname{grad}\Phi(\vec{r}) = -\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{m_0}{2\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\mp 1\right)\vec{e}_z \\ &= \frac{m_0}{2\varepsilon}\left(\frac{\sqrt{z^2+a^2}-z\frac{2z}{2\sqrt{z^2+a^2}}}{z^2+a^2}\right)\vec{e}_z = \frac{m_0}{2\varepsilon}\left(\frac{z^2+a^2-z^2}{\sqrt{z^2+a^2}^3}\right)\vec{e}_z = \underline{\frac{m_0}{2\varepsilon}\frac{a^2}{\sqrt{z^2+a^2}^3}\vec{e}_z}\end{aligned}$$

8.4 Feld von zwei elektrischen Dipolen

Mit dem Aufpunktvektor $\vec{r} = y\vec{e}_y$ auf der y-Achse berechnet sich das Skalarpotential beider Dipole $\vec{p}_1 = p_0(\vec{e}_x+\vec{e}_y)$ und $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ am Ort $\vec{r}'_{1/2} = \pm a\vec{e}_x$ durch Superposition der Einzelpotentiale zu

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{2}\frac{\vec{p}_i(\vec{r}-\vec{r}'_i)}{|\vec{r}-\vec{r}'_i|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\vec{p}_1\frac{\vec{r}-\vec{r}'_1}{|\vec{r}-\vec{r}'_1|^3}+\vec{p}_2\frac{\vec{r}-\vec{r}'_2}{|\vec{r}-\vec{r}'_2|^3}\right] \\ &= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon}(\vec{e}_x+\vec{e}_y)\left[\frac{-a\vec{e}_x+y\vec{e}_y}{\sqrt{y^2+a^2}^3}-\frac{a\vec{e}_x+y\vec{e}_y}{\sqrt{y^2+a^2}^3}\right] = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon}\frac{-2a(\vec{e}_x+\vec{e}_y)\vec{e}_x}{\sqrt{y^2+a^2}^3} = \underline{-\frac{p_0}{2\pi\varepsilon}\frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}^3}}\end{aligned}$$

8.5 Dipol über einer leitenden Ebene

Zur Bestimmung des elektrischen Feldes des Dipols mit dem Moment $\vec{p} = p_0(\vec{e}_x+\vec{e}_y)$ am Ort $\vec{r}_\mathrm{D} = a\vec{e}_x$ vor der leitenden und geerdeten yz-Ebene nimmt man nach dem Spiegelungsprinzip einen zweiten Dipol mit dem Dipolmoment $\vec{p}' = p_0(\vec{e}_x-\vec{e}_y)$ auf der gegenüber liegenden Seite bei $\vec{r}'_\mathrm{D} = -a\vec{e}_x$ an und berechnet das Gesamtfeld als Summe der elektrischen Felder beider Dipole. Mit dem Aufpunktvektor $\vec{r} = y\vec{e}_y$ eines Beobachtungspunktes auf der y-Achse ist dann

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_\mathrm{D}(\vec{r})+\vec{E}'_\mathrm{D}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[3\frac{\big((\vec{r}-\vec{r}_\mathrm{D})\vec{p}\big)(\vec{r}-\vec{r}_\mathrm{D})}{|\vec{r}-\vec{r}_\mathrm{D}|^5}-\frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}_\mathrm{D}|^3}+3\frac{\big((\vec{r}-\vec{r}'_\mathrm{D})\vec{p}'\big)(\vec{r}-\vec{r}'_\mathrm{D})}{|\vec{r}-\vec{r}'_\mathrm{D}|^5}-\frac{\vec{p}'}{|\vec{r}-\vec{r}'_\mathrm{D}|^3}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[3\frac{\begin{pmatrix}-a\\y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}p_0\begin{pmatrix}-a\\y\end{pmatrix}}{\sqrt{y^2+a^2}^5}-\frac{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}p_0}{\sqrt{y^2+a^2}^3}+3\frac{\begin{pmatrix}a\\y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}p_0\begin{pmatrix}a\\y\end{pmatrix}}{\sqrt{y^2+a^2}^5}-\frac{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}p_0}{\sqrt{y^2+a^2}^3}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[3\frac{(y-a)p_0(-a\vec{e}_x+y\vec{e}_y-a\vec{e}_x-y\vec{e}_y)}{\sqrt{y^2+a^2}^5}-\frac{p_0(\vec{e}_x+\vec{e}_y+\vec{e}_x-\vec{e}_y)}{\sqrt{y^2+a^2}^3}\right] \\ &= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon}\left[-3\frac{2a(y-a)\vec{e}_x}{\sqrt{y^2+a^2}^5}-\frac{2\vec{e}_x}{\sqrt{y^2+a^2}^3}\right] = \underline{-\frac{p_0}{2\pi\varepsilon}\left[\frac{3a(y-a)}{\sqrt{y^2+a^2}^5}+\frac{1}{\sqrt{y^2+a^2}^3}\right]\vec{e}_x}\end{aligned}$$

8.6 Elektrischer Dipol im Feld einer Punktladung

Wie in Aufgabe 8.2 bestimmt man zunächst das elektrische Feld des Dipols mit dem Dipolmoment $\vec{p}$ am Ort $\vec{r}_\mathrm{D}$, wobei sich der Abstandsvektor mit dem Ort der Punktladung $\vec{r}_Q$ als $\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_\mathrm{D}$ schreibt.

$$\vec{E}_\mathrm{D}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[3\frac{(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}|^3}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[3\frac{\big((\vec{r}_Q - \vec{r}_\mathrm{D})\vec{p}\big)(\vec{r}_Q - \vec{r}_\mathrm{D})}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_\mathrm{D}|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_\mathrm{D}|^3}\right]$$

Die COULOMB-Kraft der Punktladung Q auf den Dipol berechnet sich damit zu

$$\vec{F} = -\vec{F}_\mathrm{D} = -Q\vec{E}_\mathrm{D} = \underline{-\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[3\frac{\big((\vec{r}_Q - \vec{r}_\mathrm{D})\vec{p}\big)(\vec{r}_Q - \vec{r}_\mathrm{D})}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_\mathrm{D}|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_\mathrm{D}|^3}\right]}$$

Das negative Vorzeichen ergibt sich dabei aus dem Wechselwirkungsprinzip, d.h. es wirkt eine betragsmäßig gleich große, entgegengesetzte Kraft von der Punktladung auf den Dipol wie vom Dipol auf die Punktladung ausgeübt wird („*actio=reactio*“).

9 Elektrostatik - Kapazität und Energie im Dielektrikum

9.1 Kapazität eines Kugelkondensators

Aufgrund der Rotationssymmetrie des Kugelkondensators bietet es sich an, zunächst das elektrische Feld $\vec{E} = E_r \vec{e}_r$ im Innenbereich $a \leq r \leq b$ zwischen den beiden Elektroden nach der Gausschen Methode zu berechnen. Die Integration erfolgt dabei über das Volumen bzw. die Oberfläche einer konzentrischen Kugel mit Radius r. Mit $\mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}A\vec{e}_r$ und $\mathrm{d}A = r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$ folgt dann

$$\begin{aligned} \varepsilon \oiint_{\partial V} \vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{A} &= \iiint_V \varrho_\mathrm{V}(\vec{r}')\mathrm{d}V \\ \varepsilon \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E_r(r) r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi = 4\pi\varepsilon r^2 E_r(r) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \varrho_\mathrm{V}(\vec{r}') r'^2 \sin\vartheta \mathrm{d}r'\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

Für $r < a$ befindet man sich innerhalb der Innenelektrode, womit das Integrationsvolumen keine Ladung enthält, da diese nur auf den beiden Elektroden verteilt ist. Die rechte Seite in obiger Gleichung ist dementsprechend Null und die elektrische Feldstärke im Inneren verschwindet. Gleichermaßen ist das Feld im Außenraum Null, denn der Kondensator ist insgesamt neutral und für die eingeschlossene Ladung beider Elektroden gilt $\iiint \varrho_\mathrm{V}\mathrm{d}V = +Q - Q = 0$. Im Bereich des Dielektrikums mit $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}$ schließt man dagegen die innere Elektrode ein und berechnet somit für die Feldstärke

$$4\pi\varepsilon r^2 E_r(r) = Q \qquad \Rightarrow \qquad \underline{E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}}$$

Das Skalarpotential folgt aus dem Gradienten des elektrischen Feldes mit der Randbedingung $\Phi(b) = 0$ an der geerdeten Außenelektrode

$$\begin{aligned} E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \Phi(r) &= \Phi(b) - \int_b^r E_r(r')\mathrm{d}r' = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_b^r \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r'}\right]_b^r = \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)} \\ U_0 = \Phi(a) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{b-a}{ab} \qquad \Rightarrow \qquad Q = 4\pi\varepsilon U_0 \frac{ab}{b-a} \end{aligned}$$

Die an den Kugelkondensator angelegte Gleichspannung U_0 entspricht der Potentialdifferenz zwischen beiden Elektroden, womit sich Feldstärke und Potential schließlich wie folgt ausdrücken lassen

$$\underline{E_r(r) = \frac{ab}{b-a}\frac{U_0}{r^2}} \qquad\qquad \underline{\Phi(r) = U_0 \frac{b-r}{b-a}\frac{a}{r}} \qquad (a \leq r \leq b)$$

Als Kapazität der Anordnung erhält man nun

$$\underline{C = \frac{Q}{U_0} = 4\pi\varepsilon\frac{ab}{b-a}}$$

9.2 Kapazität einer Koaxialleitung

Wie bereits in Aufgabe 9.1 für einen Kugelkondensator geschehen, berechnet man für die gegebene Koaxialleitung zunächst das elektrische Feld im Inneren unter Nutzung der Gaussschen Methode

$$\varepsilon \int_0^{2\pi}\int_0^{l} E_\varrho(\varrho)\varrho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z = 2\pi\varepsilon l \varrho E_\varrho(\varrho) = Q \qquad \Rightarrow \qquad \underline{E_\varrho(\varrho) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\frac{1}{\varrho}} \qquad (a \le \varrho \le b)$$

und aus diesem mithilfe des Gradienten das elektrische Potential bzw. die Potentialdifferenz zwischen Innen- und Außenelektrode

$$E_\varrho = -\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \quad \Rightarrow \quad \Phi(a) = \Phi(b) - \int_b^a E_\varrho(\varrho)\mathrm{d}\varrho = \Phi(b) - \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\int_b^a \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = \Phi(b) - \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad U = \Phi(a) - \Phi(b) = \underline{\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Hiermit folgt die Kapazität C der Leitung zu

$$\underline{C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

Die im Dielektrikum gespeicherte elektrostatische Energie bestimmt sich nun gemäß

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\iiint_V \vec{E}\vec{D}\mathrm{d}V = \frac{\varepsilon}{2}\iiint_V E^2 \mathrm{d}V \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\int_0^l\int_a^b\int_0^{2\pi}\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\frac{1}{\varrho}\right)^2 \varrho \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}z = \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon l^2}\underbrace{\int_0^l \mathrm{d}z}_{=l}\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi}_{=2\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = \underline{\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \end{aligned}$$

9.3 Kapazität eines Kugelkondensators mit inhomogenem Dielektrikum

Besitzt der Kugelkondensator aus Aufgabe 9.1 ein inhomogenes Dielektrikum, so muss die Rechnung entsprechend abgeändert und die vom Radius abhängige Permittivität $\varepsilon(r) = \varepsilon_0\frac{r}{a}$ berücksichtigt werden. Während sich hierbei der gleiche Ausdruck für die elektrische Feldstärke ergibt, so bestimmt sich die Potentialdifferenz zwischen beiden Elektroden nun jedoch zu

$$\begin{aligned} \Phi(a) &= \Phi(b) - \int_b^a E_r(r)\mathrm{d}r = \Phi(b) - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon(r)}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \Phi(b) - \frac{Qa}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{\mathrm{d}r}{r^3} \\ \Phi(a) - \Phi(b) &= -\frac{Qa}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{2r^2}\right]_b^a = \frac{Qa}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \underline{\frac{Qa}{8\pi\varepsilon_0}\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}} \end{aligned}$$

und die Kapazität lautet in diesem Fall

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\Phi(a)-\Phi(b)} = \underline{8\pi\varepsilon_0\frac{ab^2}{b^2-a^2}}$$

9.4 Energie in einer dielektrischen Kugel

Die Berechnung der im Dielektrikum der Kugel und im Außenraum enthaltenen elektrostatischen Energie W setzt die Kenntnis der elektrischen Feldstärke voraus, wofür wieder auf das Ergebnis aus Aufgabe 9.1 zurückgegriffen werden kann. Statt der auf der Innenelektrode des Kugelkondensators befindlichen Ladung Q schließt das Integrationsvolumen hier nun die Punktladung Q_0 im Ursprung ein und die Feldstärke lautet

$$4\pi\varepsilon r^2 E_r(r) = Q_0 \qquad \Rightarrow \qquad E_r(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}$$

Somit folgt für die Energie im Volumen zwischen einem Radius a und dem Außenradius b der Kugel

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{\varepsilon}{2}\iiint_V E_r(r)^2 \mathrm{d}V = \frac{\varepsilon}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}\right)^2 r^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\ &= \frac{Q_0^2}{32\pi^2\varepsilon}\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi}_{=2\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta}_{=2}\int_a^b\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = \underline{\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)} \end{aligned}$$

und für die Energie außerhalb mit $\varepsilon_\mathrm{r} = 1$ bzw. $\varepsilon = \varepsilon_0$

$$W_a = \frac{\varepsilon_0}{2}\lim_{R\to\infty}\int_b^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\right)^2 r^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0}\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{r}\right]_b^R = \underline{\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{b}}$$

9.5 Energie in einer geladenen Kugel

Für die geladene Kugel mit Radius a und der homogenen Raumladung $\varrho_\mathrm{V} = \varrho_0\Theta(a-r)$ bestimmt man analog zu den vorangegangenen Aufgaben in einem ersten Schritt zunächst das elektrische Feld im betreffenden Raumbereich, d.h. das Feld im Inneren der Ladungsverteilung

$$\begin{aligned} \varepsilon\oiint_{\partial V}\vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{A} &= \iiint_V \varrho_\mathrm{V}(\vec{r}')\mathrm{d}V \\ \varepsilon\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}E_r(r)r^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi = 4\pi\varepsilon r^2 E_r(r) &= \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varrho_0\Theta(a-r')r'^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r' = 4\pi\varrho_0\int_0^r r'^2\mathrm{d}r' \\ \Rightarrow \qquad E_r(r) &= \frac{\varrho_0}{\varepsilon r^2}\left[\frac{r'^3}{3}\right]_0^r = \underline{\frac{\varrho_0}{3\varepsilon}r} \qquad (r\le a) \end{aligned}$$

und hieraus die im Kugelvolumen enthaltene Energie

$$\begin{aligned} W &= \frac{\varepsilon}{2}\iiint_V E_r(r)^2\mathrm{d}V = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\varrho_0}{3\varepsilon}r\right)^2 r^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \frac{2\pi\varrho_0^2}{9\varepsilon}\int_0^a r^4\mathrm{d}r \\ &= \frac{2\pi\varrho_0^2}{9\varepsilon}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a = \underline{\frac{2\pi\varrho_0^2}{45\varepsilon}a^5} \end{aligned}$$

9.6 Energie in zwei dielektrischen Schichten

Die vorliegende Anordnung einer Kugel mit Radius a, in deren Mittelpunkt sich die Punktladung Q und auf derem Äußeren sich zwei dielektrische Schichten mit den Außenradien $b = 2a$ bzw. $c = 3a$ sowie den Permittivitäten ε_1 bzw. $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{3}$ befinden, ähnelt derjenigen aus Aufgabe 9.4, weshalb die dort erhaltenen Ergebnisse zur Lösung genutzt werden können und nur geringfügig modifiziert werden müssen. Für die elektrische Feldstärke gilt wiederum

$$4\pi\varepsilon r^2 E_r(r) = Q \qquad \Rightarrow \qquad E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}$$

Im inneren Dielektrikum mit $a \leq r \leq b$ ist $\varepsilon = \varepsilon_1$, womit für die darin gespeicherte Energie folgt

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{\varepsilon_1}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\frac{1}{r^2}\right)^2 r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_1}\int_a^{2a}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_1}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^{2a} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2a}\right) = \underline{\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_1 a}} \end{aligned}$$

In der äußeren dielektrischen Schicht mit $b \leq r \leq c$ ist $\varepsilon = \varepsilon_2$ und die Energie somit

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{\varepsilon_2}{2}\int_b^c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\frac{1}{r^2}\right)^2 r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_2}\int_{2a}^{3a}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_2}\left[-\frac{1}{r}\right]_{2a}^{3a} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{3a}\right) = \underline{\frac{Q^2}{48\pi\varepsilon_2 a}} \end{aligned}$$

Als Gesamtenergie des geschichteten Dielektrikums erhält man dementsprechend

$$W_{\mathrm{Ges}} = W_1 + W_2 = \frac{Q^2}{8\pi a}\left(\frac{1}{2\varepsilon_1}+\frac{1}{6\varepsilon_2}\right) = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_1 a}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\right) = \underline{\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_1 a}}$$

10 Stationäres Strömungsfeld

10.1 Stromdurchflossener Bügel

Infolge der gleich bleibenden Querschnittsfläche ist der Betrag der Stromdichte $J = \frac{I}{A}$ über die Länge des Leiterbügels konstant, weshalb wegen der homogenen Leitfähigkeit κ des Materials mit $\vec{J} = \kappa\vec{E} = -\kappa \operatorname{grad}\Phi$ auch der Gradient des Potentials Φ konstant sein und Φ damit linear vom Winkel φ abhängen muss. Aus den Potentialwerten an den Leiterenden kann daher die Relationsgleichung $\Phi(\varphi) = m\varphi + n$ wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} n &= \Phi(\varphi = 0) = \Phi_a \qquad\qquad m = \frac{\Phi(\varphi) - n}{\varphi} \overset{\varphi=\pi}{=} \frac{\Phi(\pi) - \Phi_a}{\pi} = -\frac{\Phi_a - \Phi_b}{\pi} \\ \Rightarrow \qquad \Phi(\varphi) &= -\frac{\Phi_a - \Phi_b}{\pi}\varphi + \Phi_a = \underline{\Phi_a - (\Phi_a - \Phi_b)\frac{\varphi}{\pi}} \end{aligned}$$

Die Stromdichte ist gemäß obiger Materialgleichung mit dem elektrischen Feld verknüpft, welches sich aus dem Gradienten des Potentials berechnen lässt

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \kappa\vec{E} = -\kappa \operatorname{grad}\Phi(\varphi) = -\kappa \left[\underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}}_{=0} \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial z}}_{=0} \vec{e}_z \right] = -\frac{\kappa}{\varrho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi \\ &= -\frac{\kappa}{\varrho}\left(-\frac{(\Phi_a - \Phi_b)}{\pi}\right)\vec{e}_\varphi = \underline{\frac{\kappa}{\varrho\pi}(\Phi_a - \Phi_b)\vec{e}_\varphi} \end{aligned}$$

Den Widerstand R eines Leiters der Länge l und Querschnittsfläche A bestimmt man allgemein nach dem Ohmschen Gesetz aus dem Quotienten der über diesem abfallenden Spannung U und dem darin fließenden Strom I, wobei sich die Spannung aus dem Wegintegral des elektrischen Feldes $U = \int \vec{E}\mathrm{d}\vec{r} = El$ und der Strom aus dem Flächenintegral über die Stromdichte $I = \iint \vec{J}\mathrm{d}\vec{A} = JA$ ergibt. Somit folgt

$$R = \frac{U}{I} = \frac{El}{JA} = \frac{El}{\kappa EA} = \underline{\frac{1}{\kappa}\frac{l}{A}}$$

Der Widerstand des Bügels ergibt sich nun durch Zerlegung des Leiters in infinitesimal schmale, koaxiale Hohlzylinderelemente mit der Querschnittsfläche $A = b \cdot \mathrm{d}\varrho$ und Länge $l = \pi\varrho$, welche bei lateraler Durchströmung parallel zueinander liegen und jeweils einen Beitrag $\mathrm{d}G$ zum Gesamtleitwert G liefern. Aufgrund der Parallelschaltung wird nun über alle Leitwerte integriert und man erhält

$$\begin{aligned} \mathrm{d}G &= \kappa\frac{A}{l} = \kappa\frac{b\mathrm{d}\varrho}{\pi\varrho} \\ G &= \int_{\varrho_i}^{\varrho_a} \kappa\frac{b\mathrm{d}\varrho}{\pi\varrho} = \frac{\kappa b}{\pi}\int_{\varrho_i}^{\varrho_a}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = \frac{\kappa b}{\pi}\ln\left(\frac{\varrho_a}{\varrho_i}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{R = \frac{1}{G} = \frac{\pi}{\kappa b \ln\left(\frac{\varrho_a}{\varrho_i}\right)}} \end{aligned}$$

10.2 Halbkugelerder

Zur Berechnung des Skalarpotentials $\Phi(\vec{r})$ bestimmt man zunächst das elektrische Feld $\vec{E}$ aus der Stromdichte $\vec{J}$ im Abstand r zum Mittelpunkt des Halbkugelerders. Da der Strom I vom Erdungspunkt radial ins Erdreich abfließt, besitzen Stromdichte $\vec{J} = J(r)\vec{e}_r$ und elektrostatisches Feld $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ jeweils nur eine Radialkomponente und das Flächenelement lautet in Kugelkoordinaten $\mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}A\vec{e}_r$ mit $\mathrm{d}A = r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$. Man integriert nun über die untere Halbebene des Erdreichs und erhält

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_A \vec{J}\mathrm{d}\vec{A} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Jr^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi = J\ 2\pi r^2 \\ \vec{E}(r) &= \frac{\vec{J}(r)}{\kappa} = \frac{I}{2\pi\kappa r^2}\vec{e}_r \end{aligned}$$

Das zugehörige Skalarpotential bestimmt sich aus dem Gradienten des elektrischen Feldes, wobei die Integration - im Unendlichen beginnend, da hier das Potential verschwindet - bis zum Abstand r vom Erdermittelpunkt durchgeführt wird. Das Oberflächenpotential ergibt sich dann durch Einsetzen des Radius a des Erders.

$$\Phi(r) = \underbrace{\Phi(\infty)}_{=0} - \int\limits_\infty^r E(r')\mathrm{d}r' = -\frac{I}{2\pi\kappa}\int\limits_\infty^r \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2} = \underline{\frac{I}{2\pi\kappa r}} \qquad , \qquad \Phi(a) = \frac{I}{2\pi\kappa a}$$

Für den Erdungswiderstand folgt schließlich

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\Phi(a) - \Phi(\infty)}{I} = \underline{\frac{1}{2\pi\kappa a}}$$

10.3 Stromdurchflossenes Hohlzylindersegment

Um die übrigen gesuchten Größen zu berechnen, wird zunächst der Widerstand R des gesamten Hohlzylindersegmentes bestimmt, wobei wieder wie in Aufgabe 10.1 verfahren und der Leiter in differentielle Leiterelemente zerlegt wird. Der Beitrag $\mathrm{d}R$ eines infinitesimal dünnen, koaxialen Hohlzylinderelementes der Querschnittsfläche $A = h \cdot \varrho\alpha$ und Länge $l = \mathrm{d}\varrho$ zum Gesamtwiderstand ist dabei

$$\mathrm{d}R = \frac{1}{\kappa}\frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\varrho}{h\varrho\alpha}$$

Bei radialer Durchströmung des Segmentes ergibt sich eine Reihenschaltung aller Leiterelemente, weshalb man über sämtliche Widerstandsbeiträge integriert.

$$R = \int_a^b \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\varrho}{h\varrho\alpha} = \frac{1}{\kappa h\alpha}\int_a^b \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = \underline{\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\kappa h\alpha}}$$

Der von außen nach innen durch den Leiter fließende Strom I ist aufgrund der Kontinuitätsgleichung konstant. Lediglich die Querschnittsfläche A variiert, sodass die Stromdichte $\vec{J}$ an der inneren Mantelfläche größer ist als an der äußeren. Mit $\vec{J} = -J(\varrho)\vec{e}_\varrho$ und $\mathrm{d}\vec{A} = \varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\vec{e}_\varrho$ in Zylinderkoordinaten berechnet man für Strom und Stromdichte

$$\begin{aligned} I &= \frac{U}{R} = \Big(\Phi(b) - \Phi(a)\Big)\frac{\kappa h\alpha}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{(\Phi_b - \Phi_a)\kappa h\alpha}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \\ &= \iint \vec{J}\mathrm{d}\vec{A} = -\int_0^h\int_0^\alpha J(\varrho)\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = -J(\varrho)\varrho\alpha h \\ \Rightarrow \qquad \vec{J}(\varrho) &= -\frac{I}{\varrho\alpha h}\vec{e}_\varrho = \underline{-\frac{(\Phi_b - \Phi_a)\kappa}{\varrho\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\vec{e}_\varrho} \end{aligned}$$

Hieraus folgt direkt der Ausdruck für die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ sowie über den Gradienten des Feldes das Skalarpotential Φ

$$\begin{aligned} \vec{E}(\varrho) &= \frac{\vec{J}(\varrho)}{\kappa} = \underline{-\frac{\Phi_b - \Phi_a}{\varrho\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\vec{e}_\varrho} \qquad = -\frac{\partial\Phi(\varrho)}{\partial\varrho}\vec{e}_\varrho \\ \Phi(\varrho) &= \Phi(a) - \int_a^\varrho E(\varrho')\mathrm{d}\varrho' = \Phi_a + \frac{\Phi_b - \Phi_a}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\int_a^\varrho \frac{\mathrm{d}\varrho'}{\varrho'} = \underline{\Phi_a + \Big(\Phi_b - \Phi_a\Big)\frac{\ln\left(\frac{\varrho}{a}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}} \end{aligned}$$

10.4 Zylindrischer Leiter mit ortsabhängiger Leitfähigkeit

Analog zu Aufgabe 10.3 berechnet man zuerst den elektrischen Widerstand des zylindrischen Leiters. Der Beitrag $\mathrm{d}G$ eines infinitesimal dünnen, koaxialen Hohlzylinderelementes der Querschnittsfläche $A = 2\pi\varrho \cdot \mathrm{d}\varrho$ und Länge l zum Gesamtleitwert ist

$$\mathrm{d}G = \kappa(\varrho)\frac{A}{l} = \kappa_0\left(1 - \frac{\varrho}{2a}\right)\frac{2\pi\varrho\mathrm{d}\varrho}{l}$$

Bei axialer Durchströmung des Zylinders ergibt sich eine Parallelschaltung aller Leiterelemente mit

$$\begin{aligned} G &= \int_0^a \kappa_0\left(1 - \frac{\varrho}{2a}\right)\frac{2\pi\varrho\mathrm{d}\varrho}{l} = \frac{2\pi\kappa_0}{l}\int_0^a \left(\varrho - \frac{\varrho^2}{2a}\right)\mathrm{d}\varrho \\ &= \frac{\pi\kappa_0}{l}\left[\varrho^2 - \frac{\varrho^3}{3a}\right]_0^a = \frac{\pi\kappa_0}{l}\left(a^2 - \frac{a^2}{3}\right) = \frac{2\pi\kappa_0 a^2}{3l} \\ \Rightarrow \qquad R &= \frac{1}{G} = \underline{\frac{3l}{2\pi\kappa_0 a^2}} \end{aligned}$$

Stromdichte $\vec{J}$ und Strom I lassen sich nun aus dem Potential Φ berechnen, für welches analog zu Aufgabe 10.1 wieder ein linearer Verlauf entlang der Zylinderachse angenommen werden kann. Es ist

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \underbrace{\Phi(0)}_{=0} + \frac{\Phi(l) - \Phi(0)}{l}z = \frac{\Phi(l)}{l}z = \frac{U}{l}z \\ \vec{J} &= \kappa\vec{E} = -\kappa(\varrho)\,\mathrm{grad}\,\Phi(z) = -\kappa_0\left(1 - \frac{\varrho}{2a}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{U}{l}z\right)\vec{e}_z = \underline{-\frac{\kappa_0 U}{l}\left(1 - \frac{\varrho}{2a}\right)\vec{e}_z} \\ I &= \iint \vec{J}\mathrm{d}\vec{A} = \frac{\kappa_0 U}{l}\int_0^a\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{\varrho}{2a}\right)\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho = \frac{2\pi\kappa_0 U}{l}\int_0^a\left(\varrho - \frac{\varrho^2}{2a}\right)\mathrm{d}\varrho \\ &= \frac{\pi\kappa_0 U}{l}\left[\varrho^2 - \frac{\varrho^3}{3a}\right]_0^a = \underline{\frac{2\pi\kappa_0 U a^2}{3l}} \end{aligned}$$

11 Magnetostatik - Durchflutungs- und Induktionsgesetz

11.1 Magnetischer Fluss durch eine ruhende rechteckige Leiterschleife

Bevor der magnetische Fluss durch die rechteckige Leiterschleife berechnet werden kann, muss zunächst das vom Gleichstrom I hervorgerufene Magnetfeld um den Leiter bestimmt werden. Ausgehend vom Durchflutungsgesetz der MAXWELL-Gleichungen, welches das magnetische Feld $\vec{H}$ mit der Stromdichte $\vec{J}$ verknüpft und in dem für die magnetostatische Betrachtung die zeitliche Ableitung der elektrischen Flussdichte $\vec{D}$ entfällt, gelangt man durch Bildung des Flächenintegrals zu einem Ausdruck für den Strom durch den Draht.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H} &= \vec{J}+\underbrace{\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}_{=0} \\ \iint\limits_A \operatorname{rot}\vec{H}\mathrm{d}\vec{A} = \oint\limits_{\partial A}\vec{H}\mathrm{d}\vec{r} &= \iint\limits_A \vec{J}\mathrm{d}\vec{A} = I \end{aligned}$$

Als Fläche wird aufgrund der Zylindersymmetrie eine konzentrische, senkrecht auf dem Leiter stehende Kreisfläche mit Radius ϱ gewählt, welche den gesamten Strom I umfasst. Das Flächenintegral über die Rotation des Feldes schreibt sich dabei mithilfe des STOKESschen Integralsatzes als Wegintegral über den Rand der Fläche, wobei die magnetische Feldstärke $\vec{H} = H(\varrho)\vec{e}_\varphi$ wegen des gleich bleibenden Abstandes ϱ zum Leiter auf dem gesamten Weg konstant bleibt. Mit dem vektoriellen Wegelement $\mathrm{d}\vec{r} = \varrho\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$ und unter Verwendung der Materialgleichung $\vec{B} = \mu\vec{H}$ erhält man also

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{2\pi} H(\varrho)\vec{e}_\varphi\varrho\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi = 2\pi\varrho H(\varrho) &= I \\ \Rightarrow \qquad \vec{H}(\varrho) &= \frac{I}{2\pi\varrho}\vec{e}_\varphi \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{\vec{B}(\varrho) = \frac{\mu I}{2\pi\varrho}\vec{e}_\varphi} \end{aligned}$$

Der magnetische Fluss Φ_A ergibt sich nun durch Integration der magnetischen Flussdichte über die gesamte Rechteckfläche der Leiterschleife

$$\Phi_A = \iint\limits_A \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = \int\limits_{z_0}^{z_0+h}\int\limits_{\varrho_0}^{\varrho_0+b} B(\varrho)\vec{e}_\varphi\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}z\vec{e}_\varphi = \frac{\mu I}{2\pi}\int\limits_{z_0}^{z_0+h}\mathrm{d}z\int\limits_{\varrho_0}^{\varrho_0+b}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = \underline{\frac{\mu I h}{2\pi}\ln\left(\frac{\varrho_0+b}{\varrho_0}\right)}$$

11.2 Magnetischer Fluss durch eine bewegte rechteckige Leiterschleife

Da bis auf die Bewegung der Leiterschleife die gleiche Situation wie in Aufgabe 11.1 vorliegt, können im Wesentlichen die zuvor erhaltenen Ergebnisse übernommen und müssen lediglich die Integrationsgrenzen bei der Berechnung des magnetischen Flusses modifiziert werden. Entfernt sich die Leiterschleife mit der Geschwindigkeit v_0 in radialer Richtung vom stromdurchflossenen Leiter, sind Unter- und Obergrenze bei der Integration nach dem Abstand ϱ zeitabhängig mit $\varrho_i(t) = \varrho_0 + v_0 t$ und $\varrho_a(t) = \varrho_0 + b + v_0 t$, sodass gilt

$$\Phi_A(t) = \iint\limits_A \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = \int\limits_{z_0}^{z_0+h}\int\limits_{\varrho_i(t)}^{\varrho_a(t)} B(\varrho)\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}z = \frac{\mu I}{2\pi}\int\limits_{z_0}^{z_0+h}\mathrm{d}z\int\limits_{\varrho_0+v_0t}^{\varrho_0+b+v_0t}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = \underline{\frac{\mu I h}{2\pi}\ln\left(\frac{\varrho_0+b+v_0t}{\varrho_0+v_0t}\right)}$$

Alternativ lässt sich der magnetische Fluss auch dadurch berechnen, dass die Leiterschleife als ruhend und der Linienleiter als bewegt angenommen wird, was letztlich der selben Relativbewegung entspricht. Mit $\varrho(t) = \varrho_0 + v_0 t$ ist dann

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) &= \int\limits_{z_0}^{z_0+h}\int\limits_{\varrho_i(t)}^{\varrho_a(t)}\frac{\mu I}{2\pi\varrho(t)}\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}z = \frac{\mu I h}{2\pi}\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{v_0\mathrm{d}t}{\varrho_0+v_0t} = \frac{\mu I h v_0}{2\pi}\int\limits_t^{t+\frac{b}{v_0}}\frac{\mathrm{d}t}{\varrho_0+v_0t}\\ &= \frac{\mu I h}{2\pi}\ln\left(\frac{\varrho_0+v_0\left(t+\frac{b}{v_0}\right)}{\varrho_0+v_0t}\right) = \underline{\frac{\mu I h}{2\pi}\ln\left(\frac{\varrho_0+v_0t+b}{\varrho_0+v_0t}\right)}\end{aligned}$$

Für die in der Leiterschleife induzierte Spannung u_{ind} folgt aus dem Induktionsgesetz der MAXWELL-Gleichungen nach Bildung des Flächenintegrals über die Rechteckfläche und unter Anwendung des STOKESschen Integralsatzes die Beziehung

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \iint\limits_A \mathrm{rot}\,\vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \underbrace{\oint\limits_{\partial A}\vec{E}\mathrm{d}\vec{r}}_{=u_{\mathrm{ind}}} &= -\iint\limits_A\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\iint\limits_A\vec{B}\mathrm{d}\vec{A}}_{=\Phi_A}\\ \Rightarrow\qquad u_{\mathrm{ind}} &= -\frac{\partial\Phi_A}{\partial t}\end{aligned}$$

Im konkreten Fall liefert die zeitliche Ableitung des magnetischen Flusses eine Spannung von

$$\begin{aligned}u_{\mathrm{ind}}(t) &= -\frac{\partial\Phi_A(t)}{\partial t} = -\frac{\mu I h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\Big[\ln(\varrho_0+b+v_0t)-\ln(\varrho_0+v_0t)\Big]\\ &= -\frac{\mu I h}{2\pi}\left(\frac{v_0}{\varrho_0+b+v_0t}-\frac{v_0}{\varrho_0+v_0t}\right) = \underline{\frac{\mu I h v_0}{2\pi}\left(\frac{1}{\varrho_0+v_0t}-\frac{1}{\varrho_0+b+v_0t}\right)}\end{aligned}$$

11.3 Gegeninduktivität - Linienleiter und dreieckförmige Leiterschleife

Die Gegeninduktivität L_{21} der Anordnung aus Linienleiter mit dem Strom I_1 entlang der x-Achse und der den Strom I_2 führenden dreieckigen Leiterschleife in der xy-Ebene ist allgemein definiert als

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

mit dem magnetischen Fluss Φ_{21} durch die Fläche der Leiterschleife, welcher sich aus dem vom Strom I_1 verursachten Magnetfeld bestimmt. Mithilfe der Gleichung für die magnetische Flussdichte des geraden Linienleiters aus Aufgabe 11.1, die entsprechend der vorliegenden Geometrie anzupassen ist, berechnet man also zunächst den die Dreiecksfläche durchsetzenden Fluss. Für das entstehende Flächenintegral muss die schräg zu den Koordinatenachsen liegende Dreieckseite dabei als obere Integrationsgrenze in Abhängigkeit entweder von x oder y ausgedrückt werden[1].

$$\begin{aligned}
\Phi_{21} &= \iint\limits_A \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = \int\limits_b^c \int\limits_0^{x(y)} B(y)\vec{e}_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{e}_z = \int\limits_b^c \int\limits_0^{\frac{a}{c-b}(c-y)} \frac{\mu I_1}{2\pi y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\mu I_1}{2\pi}\frac{a}{c-b}\int\limits_b^c \frac{c-y}{y}\mathrm{d}y \\
&= \frac{\mu I_1}{2\pi}\frac{a}{c-b}\Big[c\ln(y) - y\Big]_b^c = \frac{\mu I_1}{2\pi}\frac{a}{c-b}\left(c\ln\left(\frac{c}{b}\right) + b - c\right) = \underline{\frac{\mu I_1}{2\pi}\left(\frac{ac}{b-c}\ln\left(\frac{b}{c}\right) - a\right)}
\end{aligned}$$

Hieraus folgt schließlich direkt die Gegeninduktivität zu

$$\underline{L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu}{2\pi}\left(\frac{ac}{b-c}\ln\left(\frac{b}{c}\right) - a\right)}$$

[1] Obwohl die Integrationsreihenfolge prinzipiell auch vertauscht werden kann, führt die hier gewählte Integration auf einem kürzeren Rechenweg zum Ergebnis und für die obere Grenze der inneren Integration ist $x(y)$ als Gleichung der Hypotenuse aufzustellen.

11.4 Gegeninduktivität - 2 Linienleiter und quadratische Leiterschleife

Wie bereits in Aufgabe 11.3 ausgeführt, wird zur Berechnung der Gegeninduktivität der Anordnung zuerst der magnetische Fluss durch die quadratische Leiterschleife bestimmt. Das dabei zu berücksichtigende Magnetfeld ergibt sich aus der Überlagerung der Felder beider Linienleiter bei $y = 0$ und $y = 3a$, durch die in entgegengesetzter Richtung jeweils der Strom I_1 fließt. Die gesamte magnetische Flussdichte ist somit

$$\vec{B}(y) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu I_1}{2\pi y}\vec{e}_z + \frac{\mu I_1}{2\pi(3a-y)}\vec{e}_z = \frac{\mu I_1}{2\pi}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{3a-y}\right)\vec{e}_z$$

als magnetischen Fluss erhält man

$$\begin{aligned}
\Phi_{21} &= \iint\limits_A \vec{B}(y)\mathrm{d}\vec{A} = \frac{\mu I_1}{2\pi}\int\limits_b^{b+a}\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{3a-y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\mu I_1 a}{2\pi}\int\limits_b^{b+a}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{3a-y}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\mu I_1 a}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{b+a}{b}\right) - \ln\left(\frac{3a-(b+a)}{3a-b}\right)\right] = \underline{\frac{\mu I_1 a}{2\pi}\ln\left(\frac{b+a}{b}\cdot\frac{3a-b}{2a-b}\right)}
\end{aligned}$$

und für die Gegeninduktivität folgt

$$\underline{L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu a}{2\pi}\ln\left(\frac{b+a}{b}\cdot\frac{3a-b}{2a-b}\right)}$$

Um den für eine minimale Kopplung der Schleife, d.h. für eine möglichst geringe Gegeninduktivität der Anordnung zu wählenden Abstand $b_{\min}$ mit $0 < b_{\min} < 2a$ zu ermitteln, bestimmt man das (lokale) Minimum von L_{21} durch Ableiten nach b und Null-Setzen des resultierenden Ausdrucks.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{21}}{\partial b} &= \frac{\mu a}{2\pi}\frac{\partial}{\partial b}\Big[\ln(b+a) - \ln(b) + \ln(3a-b) - \ln(2a-b)\Big] \\
&= \frac{\mu a}{2\pi}\left[\frac{1}{b+a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{3a-b} + \frac{1}{2a-b}\right] \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{(3a-b)+b}{(3a-b)b} &= \frac{(2a-b)+(b+a)}{(2a-b)(b+a)} \\
3ab - b^2 &= 2ab - b^2 + 2a^2 - ab \qquad \Rightarrow \qquad \underline{b_{\min} = a}
\end{aligned}$$

Es zeigt sich also, dass die geringste Kopplung für den Fall erreicht wird, bei dem sich die Leiterschleife genau mittig zwischen beiden Linienleitern befindet, wie man dies auch aufgrund der Geometrie erwarten würde. Die Gegeninduktivität ist dann

$$L_{21}(b_{\min}) = \frac{\mu a}{2\pi}\ln 4 = \underline{\frac{\mu a}{\pi}\ln 2}$$

11.5 Gegeninduktivität - Linienleiter und gleichschenklige dreieckförmige Leiterschleife

Die gegebene Anordnung eines entlang der x-Achse verlaufenden und den Strom I_1 führenden Linienleiters und einer Leiterschleife in Form eines gleichschenkligen Dreiecks, durch welche der Strom I_2 fließt, ähnelt derjenigen aus Aufgabe 11.3, weshalb sich die Gegeninduktivität dementsprechend auf gleichem Wege berechnen lässt. Mit $b = \frac{a}{3}$ und $c = \frac{4a}{3}$ sowie unter Ausnutzung der Symmetrie der Leiterschleife bezüglich der y-Achse bestimmt man den magnetischen Fluss zu

$$\begin{aligned}\Phi_{21} &= \iint\limits_A \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = 2\int\limits_b^c \int\limits_0^{x(y)} B(y)\vec{e}_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{e}_z = 2\int\limits_b^c \int\limits_0^{y-\frac{a}{3}} \frac{\mu I_1}{2\pi y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\mu I_1}{\pi}\int\limits_b^c \left(1-\frac{a}{3y}\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{\mu I_1}{\pi}\left[c-b+\frac{a}{3}\ln\left(\frac{b}{c}\right)\right] = \frac{\mu I_1}{\pi}\left[a-\frac{a}{3}\ln 4\right] = \underline{\frac{\mu I_1 a}{\pi}\left(1-\frac{2}{3}\ln 2\right)}\end{aligned}$$

Die Gegeninduktivität ist demzufolge

$$\underline{L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu a}{\pi}\left(1-\frac{2}{3}\ln 2\right)}$$

11.6 Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters

Für den sehr langen, in z-Richtung verlaufenden Leiter mit Radius a, durch den der Gleichstrom I_0 fließt, berechnet sich die magnetische Feldstärke $\vec{H}(\vec{r}) = H(\varrho)\vec{e}_\varphi$ analog zu Aufgabe 11.1 aus dem Durchflutungsgesetz. Wegen der konstanten Leitfähigkeit ist auch die Stromdichte $\vec{J} = J\vec{e}_z$ über dem gesamten Querschnitt des Leiters konstant und man kann schreiben

$$\begin{aligned}\oint\limits_{\partial A} \vec{H}\mathrm{d}\vec{r} &= \iint\limits_A \vec{J}\mathrm{d}\vec{A} \\ \int\limits_0^{2\pi} H(\varrho)\varrho\mathrm{d}\varphi = 2\pi\varrho H(\varrho) &= \int\limits_0^{\varrho}\int\limits_0^{2\pi} J\Theta(a-\varrho')\varrho'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho' = 2\pi J\int\limits_0^{\varrho}\Theta(a-\varrho')\varrho'\mathrm{d}\varrho'\end{aligned}$$

Während bei der Integration über die senkrecht zum Leiter stehende Kreisfläche mit dem Radius ϱ für den Fall $\varrho > a$, d.h. außerhalb des Leiters, der gesamte Strom I_0 erfasst wird und somit gilt

$$\begin{aligned}2\pi\varrho H(\varrho) &= 2\pi J\int\limits_0^a \varrho'\mathrm{d}\varrho' = J\pi a^2 = I_0 \\ \Rightarrow \qquad \vec{H}(\varrho) &= \underline{\frac{I_0}{2\pi\varrho}\vec{e}_\varphi \qquad (\varrho > a)}\end{aligned}$$

schließt man im Leiterinneren für $\varrho \le a$ nur einen Teil des Gesamtstromes ein und erhält dementsprechend eine geringere magnetische Feldstärke

$$\begin{aligned}2\pi\varrho H(\varrho) &= 2\pi J\int\limits_0^{\varrho}\varrho'\mathrm{d}\varrho' = J\pi\varrho^2 \overset{J\pi a^2 = I_0}{=} I_0\frac{\pi\varrho^2}{\pi a^2} = I_0\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \\ \Rightarrow \qquad \vec{H}(\varrho) &= \underline{\frac{I_0}{2\pi\varrho}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\vec{e}_\varphi = \frac{I_0}{2\pi a^2}\varrho\vec{e}_\varphi \qquad (\varrho \le a)}\end{aligned}$$

11.7 Magnetfeld eines stromdurchflossenen Koaxialleiters

Die Berechnung der magnetischen Feldstärke im gesamten Raum des Koaxialleiters, bestehend aus Innenleiter mit Radius a, durch den der Strom $I_i = +I$ fließt, und Außenleiter mit Innenradius b und Außenradius c, welcher den Strom $I_a = -I$ führt, erfolgt auf gleiche Weise wie in Aufgabe 11.6 für den Einzelleiter. Innerhalb des Innenleiters mit $\varrho \leq a$ gilt

$$\begin{aligned} \oint\limits_{\partial A} \vec{H}\mathrm{d}\vec{r} = H(\varrho)2\pi\varrho &= J_i\pi\varrho^2 = +I\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \\ \Rightarrow \qquad \vec{H}(\varrho) &= \underline{\frac{I}{2\pi a^2}\varrho\vec{e}_\varphi \qquad (\varrho \leq a)} \end{aligned}$$

Im Zwischenraum zwischen Innen- und Außenleiter, d.h. für $a < \varrho \leq b$, erfasst man den gesamten Strom I_i des Innenleiters und es ist

$$\begin{aligned} \oint\limits_{\partial A} \vec{H}\mathrm{d}\vec{r} = H(\varrho)2\pi\varrho &= J_i\pi a^2 = I_i = +I \\ \Rightarrow \qquad \vec{H}(\varrho) &= \underline{\frac{I}{2\pi\varrho}\vec{e}_\varphi \qquad (a < \varrho \leq b)} \end{aligned}$$

Befindet man sich im Leiterinneren des Außenleiters mit $b < \varrho \leq c$, ist zusätzlich zum Strom I_i des Innenleiters ein Teil des entgegengesetzt fließenden Rückstromes I_a zu berücksichtigen

$$\begin{aligned} \oint\limits_{\partial A} \vec{H}\mathrm{d}\vec{r} = H(\varrho)2\pi\varrho &= I_i + 2\pi J_a \int\limits_b^\varrho \varrho'\mathrm{d}\varrho' = I + J_a\pi(\varrho^2 - b^2) = I + I_a\frac{\pi(\varrho^2-b^2)}{\pi(c^2-b^2)} = I\left(1 - \frac{\varrho^2-b^2}{c^2-b^2}\right) \\ \Rightarrow \qquad \vec{H}(\varrho) &= \underline{\frac{I}{2\pi\varrho}\left(1 - \frac{\varrho^2-b^2}{c^2-b^2}\right)\vec{e}_\varphi \qquad (b < \varrho \leq c)} \end{aligned}$$

Außerhalb der gesamten Koaxialleiteranordnung dagegen umschließt man sowohl den hin- als auch den rückfließenden Strom, welche in der Summe Null ergeben, weswegen auch das Magnetfeld im Außenraum für $\varrho > c$ verschwindet

$$\begin{aligned} \oint\limits_{\partial A} \vec{H}\mathrm{d}\vec{r} = H(\varrho)2\pi\varrho &= I_i + I_a = I - I = 0 \\ \Rightarrow \qquad \vec{H}(\varrho) &= \underline{\vec{0} \qquad (\varrho > c)} \end{aligned}$$

Insgesamt folgt somit für die magnetische Feldstärke

$$H_\varphi(\varrho) = \underline{\begin{cases} \frac{I}{2\pi}\frac{\varrho}{a^2} & : \quad \varrho \leq a \\ \frac{I}{2\pi}\frac{1}{\varrho} & : \quad a < \varrho \leq b \\ \frac{I}{2\pi}\frac{1}{\varrho}\left(1 - \frac{\varrho^2-b^2}{c^2-b^2}\right) & : \quad b < \varrho \leq c \\ 0 & : \quad \varrho > c \end{cases}}$$

12 Magnetostatik - Gesetz von Biot-Savart

12.1 Stromfaden aus drei Segmenten

Die Berechnung des Magnetfeldes $\vec{H}(\vec{r})$, welches vom Strom I innerhalb einer durch den Quellpunktvektor $\vec{r}'$ beschriebenen Leiteranordnung hervorgerufenen wird, geschieht mithilfe des BIOT-SAVART-Gesetzes. Dieses lässt sich aus der POISSON-Gleichung des magnetischen Vektorpotentials $\vec{A}$ herleiten, die, wie in Aufgabe 2.4 gezeigt, ihrerseits aus den MAXWELLschen Gleichungen folgt. Mit der Lösung der POISSON-Gleichung berechnet man

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi}\iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V \\
\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi}\iiint \operatorname{rot}\left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\mathrm{d}V = \frac{\mu}{4\pi}\iiint \vec{J}(\vec{r}')\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}V \\
\text{mit}\qquad \operatorname{rot}\left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) &= \underbrace{\operatorname{rot}\vec{J}(\vec{r}')}_{=\vec{0}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \vec{J}(\vec{r}')\times\operatorname{grad}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = -\vec{J}(\vec{r}')\times\left(-\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right) \\
\vec{B}(\vec{r}) = \mu\vec{H}(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi}\oint\underbrace{\iint \vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}\vec{A}}_{=I}\mathrm{d}\vec{r}'\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{\mu I}{4\pi}\oint\frac{\mathrm{d}\vec{r}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}
\end{aligned}$$

Für den gegebenen Leiter mit dem Strom I_0 bestimmt man das Gesamtfeld am Ort $\vec{r} = b\vec{e}_x$ nun durch Überlagerung der Felder der einzelnen Leiterabschnitte. Der Weg des Stromes durch die parallel zur x-Achse liegenden Leiterstücke 1 und 3 wird durch den Quellpunktvektor $\vec{r}'_{1/3} = x'\vec{e}_x \mp a\vec{e}_y$ mit $x' \in [0;\infty)$ beschrieben. Entsprechend erhält man durch Ableitung nach der veränderlichen Größe x für das differentielle Wegstück $\mathrm{d}\vec{r}'_{1/3} = \mathrm{d}x'\vec{e}_x$ und es folgt als Beitrag zum Magnetfeld

$$\begin{aligned}
\vec{H}_1 &= \frac{I_0}{4\pi}\int_{\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x'\vec{e}_x\times\left((b-x')\vec{e}_x + a\vec{e}_y\right)}{\sqrt{(b-x')^2+a^2}^3} = \frac{I_0}{4\pi}\int_{\infty}^{0}\frac{a\mathrm{d}x'\vec{e}_z}{\sqrt{(b-x')^2+a^2}^3} \overset{t:=b-x'}{=} -\frac{I_0 a}{4\pi}\vec{e}_z\int_{t(\infty)}^{t(0)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+a^2}^3} \\
&\overset{206}{=} -\frac{I_0 a}{4\pi}\vec{e}_z\left[\frac{t}{a^2\sqrt{t^2+a^2}}\right]_{-\infty}^{b} = \underline{-\frac{I_0}{4\pi a}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+1\right)\vec{e}_z}
\end{aligned}$$

bzw. für das obere Teilstück

$$\vec{H}_3 = \frac{I_0}{4\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x'\vec{e}_x\times\left((b-x')\vec{e}_x - a\vec{e}_y\right)}{\sqrt{(b-x')^2+a^2}^3} = \frac{I_0}{4\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{-a\mathrm{d}x'\vec{e}_z}{\sqrt{(b-x')^2+a^2}^3} = \ldots = \underline{-\frac{I_0}{4\pi a}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+1\right)\vec{e}_z}$$

Leiterstück 2 entlang der y-Achse mit $\vec{r}'_2 = y'\vec{e}_y$ und $y' \in [-a;a]$ sowie $\mathrm{d}\vec{r}'_2 = \mathrm{d}y'\vec{e}_y$ liefert den Feldbeitrag

$$\begin{aligned}
\vec{H}_2 &= \frac{I_0}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}y'\vec{e}_y\times\left(b\vec{e}_x - y'\vec{e}_y\right)}{\sqrt{b^2+y'^2}^3} = \frac{I_0}{4\pi}2\int_{0}^{a}\frac{b\mathrm{d}y'(-\vec{e}_z)}{\sqrt{b^2+y'^2}^3} = -\frac{I_0 b}{2\pi}\vec{e}_z\int_{0}^{a}\frac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{b^2+y'^2}^3} \\
&= -\frac{I_0 b}{2\pi}\vec{e}_z\left[\frac{y'}{b^2\sqrt{b^2+y'^2}}\right]_0^a = \underline{-\frac{I_0}{2\pi b}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{e}_z}
\end{aligned}$$

und die gesamte magnetische Feldstärke ergibt sich schließlich zu

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{3}\vec{H}_i = -\frac{I_0}{4\pi}\left[\frac{2b}{a\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{2a}{b\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{2}{a}\right]\vec{e}_z = \underline{-\frac{I}{2\pi}\left[\frac{a^2+b^2}{ab\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{a}\right]\vec{e}_z}$$

[206] Integral #206 nach BRONSTEIN, *Taschenbuch der Mathematik*:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}} \qquad \text{mit} \qquad X = x^2+a^2$$

12.2 Geteilter Stromfaden

Da die Leiteranordnung stückweise entlang der Koordinatenachsen verläuft, wird das Gesamtmagnetfeld am Beobachtungspunkt bei $\vec{r} = a(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ wie in Aufgabe 12.1 aus der Superposition der Feldbeiträge der drei einzelnen Leiterabschnitte bestimmt. Der Weg des Stromes durch den Leiter beschreibt sich dabei durch den Quellpunktvektor $\vec{r}_i' = i'\vec{e}_i$ und das Wegelement $\mathrm{d}\vec{r}_i' = \mathrm{d}i'\vec{e}_i$ mit $i \in \{x, y, z\}$. In z-Richtung ist der aus dem Unendlichen kommende und bis zum Ursprung fließende Strom I_0 zu berücksichtigen und es gilt

$$\begin{aligned}\vec{H}_z &= \frac{I_0}{4\pi}\int_\infty^0 \frac{\mathrm{d}z'\vec{e}_z \times \big(a(\vec{e}_x+\vec{e}_y) - z'\vec{e}_z\big)}{\sqrt{2a^2+z'^2}^3} = \frac{I_0}{4\pi}\int_\infty^0 \frac{a\mathrm{d}z'\big(\vec{e}_y-\vec{e}_x\big)}{\sqrt{2a^2+z'^2}^3} = \frac{I_0 a}{4\pi}(\vec{e}_y-\vec{e}_x)\int_\infty^0 \frac{\mathrm{d}z'}{\sqrt{2a^2+z'^2}^3} \\ &= \frac{I_0 a}{4\pi}(\vec{e}_y-\vec{e}_x)\left[\frac{z'}{2a^2\sqrt{2a^2+z'^2}}\right]_\infty^0 = \underline{\frac{I_0}{8\pi a}(\vec{e}_x-\vec{e}_y)}\end{aligned}$$

Im Ursprung teilt sich der Strom zu gleichen Beträgen auf die beiden anderen Koordinatenachsen auf, sodass der halbe Strom jeweils in x- und in y-Richtung wieder bis zu einem unendlich entfernten Punkt fließt. Aufgrund der Tatsache, dass stromdurchflossene Leiter - in Stromrichtung betrachtet - im Uhrzeigersinn vom magnetischen Feld „umwirbelt“ werden (*Rechte-Hand-Regel*) und sich der Beobachtungspunkt zudem im gleichen Abstand zur x- wie zur y-Achse befindet, sind beide Feldstärkeanteile hier betragsmäßig gleich groß und entgegengesetzt gerichtet, weshalb diese sich gerade gegenseitig kompensieren. Jene Überlegung bestätigt sich auch durch eine ausführliche Rechnung. So berechnet sich der Beitrag des Leiterstückes entlang der x-Achse zu

$$\begin{aligned}\vec{H}_x &= \frac{I_0/2}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x'\vec{e}_x \times \big((a-x')\vec{e}_x + a\vec{e}_y\big)}{\sqrt{(a-x')^2+a^2}^3} = \frac{I_0}{8\pi}\int_0^\infty \frac{a\mathrm{d}x'\vec{e}_z}{\sqrt{(a-x')^2+a^2}^3} = \frac{I_0 a}{8\pi}\vec{e}_z\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{(a-x')^2+a^2}^3} \\ &= \frac{I_0 a}{8\pi}\vec{e}_z\left[-\frac{a-x'}{a^2\sqrt{(a-x')^2+a^2}}\right]_0^\infty = \frac{I_0}{8\pi a}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{e}_z = \underline{\frac{I_0}{8\pi a}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{e}_z}\end{aligned}$$

und analog folgt für das Leiterstück entlang der y-Achse

$$\begin{aligned}\vec{H}_y &= \frac{I_0/2}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y'\vec{e}_y \times \big(a\vec{e}_x + (a-y')\vec{e}_y\big)}{\sqrt{a^2+(a-y')^2}^3} = \frac{I_0}{8\pi}\int_0^\infty \frac{-a\mathrm{d}y'\vec{e}_z}{\sqrt{a^2+(a-y')^2}^3} = -\frac{I_0 a}{8\pi}\vec{e}_z\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{a^2+(a-y')^2}^3} \\ &= -\frac{I_0 a}{8\pi}\vec{e}_z\left[-\frac{a-y'}{a^2\sqrt{a^2+(a-y')^2}}\right]_0^\infty = -\frac{I_0}{8\pi a}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{e}_z = \underline{-\frac{I_0}{8\pi a}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{e}_z = -\vec{H}_x}\end{aligned}$$

womit die gesamte magnetische Feldstärke lautet

$$\vec{H} = \vec{H}_x + \vec{H}_y + \vec{H}_z \overset{\vec{H}_x=-\vec{H}_y}{=} \vec{H}_z = \underline{\frac{I_0}{8\pi a}(\vec{e}_x - \vec{e}_y)}$$

12.3 Kreisförmige Leiterschleife

Zur Beschreibung der kreisförmigen und vom Strom I durchflossenen Leiterschleife mit Radius a in der xy-Ebene wählt man günstigerweise Zylinderkoordinaten, sodass sich der Ort des Leiters durch den Quellpunktvektor $\vec{r}' = a\vec{e}_\varrho$ und das differentielle Wegelement über $\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}\varphi} = a\vec{e}_\varphi$ ausdrücken lässt. Das Magnetfeld auf der z-Achse bei $\vec{r} = z\vec{e}_z$ ist dann

$$\begin{aligned}\vec{H}(z) &= \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi\times(z\vec{e}_z - a\vec{e}_\varrho)}{\sqrt{z^2+a^2}^3} = \frac{Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi(z\vec{e}_\varrho + a\vec{e}_z)}{\sqrt{z^2+a^2}^3}\\ &= \frac{Ia}{4\pi}\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}^3}\underbrace{\int_0^{2\pi}\vec{e}_\varrho\mathrm{d}\varphi}_{=\vec{0}} + \frac{Ia}{4\pi}\frac{a\vec{e}_z}{\sqrt{z^2+a^2}^3}\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi}_{=2\pi} = \underline{\frac{I}{2}\frac{a^2}{\sqrt{z^2+a^2}^3}\vec{e}_z}\end{aligned}$$

Zu beachten ist hierbei, dass der Radialeinheitsvektor $\vec{e}_\varrho$ im Gegensatz zu den kartesischen Einheitsvektoren nicht konstant, sondern vom Winkel φ abhängig ist. Demzufolge ergeben sich bei der Integration über den Winkel unterschiedliche Richtungsbeiträge, sodass ein Umlauf über den gesamten Kreis schließlich den Nullvektor liefert. Deutlicher wird dies, wenn man $\vec{e}_\varrho$ in kartesischen Koordinaten ausdrückt:

$$\int_0^{2\pi}\vec{e}_\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}(\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y)\,\mathrm{d}\varphi = \vec{e}_x\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}_{=0} + \vec{e}_y\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}_{=0} = \vec{0}$$

12.4 Rechteckige Leiterschleife

Aufgrund der Symmetrie bezüglich der Koordinatenachsen liefern gegenüber liegende Leiterstücke der rechteckigen Leiterschleife jeweils betragsmäßig gleiche Beiträge zur Gesamtfeldstärke, sodass sich die Rechnung etwas vereinfachen lässt. Der Aufpunktvektor des Beobachtungspunktes auf der z-Achse ist wieder $\vec{r} = z\vec{e}_z$. Für die parallel zur x-Achse liegenden Rechteckseiten mit $\vec{r}' = x'\vec{e}_x \mp b\vec{e}_y$ und $\mathrm{d}\vec{r}' = \mathrm{d}x'\vec{e}_x$ im Intervall $x' \in [-a;a]$ gilt

$$\begin{aligned}\vec{H}_{x,1/2} &= \frac{I}{4\pi}\int_{\mp a}^{\pm a}\frac{\mathrm{d}x'\vec{e}_x\times(-x'\vec{e}_x \pm b\vec{e}_y + z\vec{e}_z)}{\sqrt{x'^2+b^2+z^2}^3} = \pm\frac{I}{4\pi}2(\pm b\vec{e}_z - z\vec{e}_y)\int_0^a\frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{x'^2+b^2+z^2}^3}\\ &= \frac{I}{2\pi}(b\vec{e}_z \mp z\vec{e}_y)\left[\frac{x'}{(b^2+z^2)\sqrt{x'^2+b^2+z^2}}\right]_0^a = \underline{\frac{I}{2\pi}\frac{b\vec{e}_z \mp z\vec{e}_y}{b^2+z^2}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+z^2}}}\end{aligned}$$

Die in y-Richtung verlaufenden Seiten mit $\vec{r}' = y'\vec{e}_y \pm a\vec{e}_x$ und $\mathrm{d}\vec{r}' = \mathrm{d}y'\vec{e}_y$ im Bereich $y' \in [-b;b]$ erzeugen hingegen den Magnetfeldbeitrag

$$\begin{aligned}\vec{H}_{y,1/2} &= \frac{I}{4\pi}\int_{\mp b}^{\pm b}\frac{\mathrm{d}y'\vec{e}_y\times(\mp a'\vec{e}_x - y'\vec{e}_y + z\vec{e}_z)}{\sqrt{a^2+y'^2+z^2}^3} = \pm\frac{I}{4\pi}2(\pm a\vec{e}_z + z\vec{e}_x)\int_0^b\frac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{a^2+y'^2+z^2}^3}\\ &= \frac{I}{2\pi}(a\vec{e}_z \pm z\vec{e}_x)\left[\frac{y'}{(a^2+z^2)\sqrt{a^2+y'^2+z^2}}\right]_0^b = \underline{\frac{I}{2\pi}\frac{a\vec{e}_z \pm z\vec{e}_x}{a^2+z^2}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+z^2}}}\end{aligned}$$

Bei der Superposition aller Beiträge heben sich dann jeweils die Feldkomponenten in x- und y-Richtung gegenseitig auf und man erhält insgesamt

$$\begin{aligned}\vec{H}(z) = \vec{H}_{x,1/2} + \vec{H}_{y,1/2} &= \frac{I}{2\pi}\left[\frac{b\vec{e}_z - z\vec{e}_y + b\vec{e}_z + z\vec{e}_y}{(b^2+z^2)\sqrt{a^2+b^2+z^2}}a + \frac{a\vec{e}_z + z\vec{e}_x + a\vec{e}_z - z\vec{e}_x}{(a^2+z^2)\sqrt{a^2+b^2+z^2}}b\right]\\ &= \underline{\frac{I}{\pi}\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2+z^2}}\left(\frac{1}{b^2+z^2}+\frac{1}{a^2+z^2}\right)\vec{e}_z}\end{aligned}$$

12.5 Sehr lange dünne Leiterbahn

Zur Berechnung der magnetischen Feldstärke, die von einem ausgedehnten Strom der Stromdichte $\vec{J}$ hervorgerufen wird, benötigt man das BIOT-SAVART-Gesetz in allgemeiner Formulierung

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \mathrm{d}V$$

Der Quellpunktvektor, welcher einen Punkt auf der sehr langen, in der xz-Ebene befindlichen und in z-Richtung orientierten Leiterbahn beschreibt, ist gegeben durch $\vec{r}' = x'\vec{e}_x + z'\vec{e}_z$ mit $x' \in [-a;a]$ und $z' \in (-\infty;\infty)$. Da sich der Strombelag lediglich über die Leiterbahnebene bei $y = 0$ erstreckt, kann dieser mit der Delta-Distribution als Flächenstromdichte in der Form $\vec{J} = \vec{J}_\mathrm{F}\delta(y') = J_{\mathrm{F}0}\delta(y')\vec{e}_z$ ausgedrückt werden. Am Ort $\vec{r} = y\vec{e}_y$ auf der y-Achse bestimmt sich das Feld demgemäß zu

$$\begin{aligned}
\vec{H}(y) &= \frac{1}{4\pi} \iiint J_{\mathrm{F}0}\delta(y')\vec{e}_z \times \frac{-x'\vec{e}_x + y\vec{e}_y - z'\vec{e}_z}{\sqrt{x'^2+y^2+z'^2}^3} \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' \\
&= \frac{J_{\mathrm{F}0}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a} \frac{-x'\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{\sqrt{x'^2+y^2+z'^2}^3} \mathrm{d}x'\mathrm{d}z' = -\frac{J_{\mathrm{F}0}}{4\pi} \int_{-a}^{a} (x'\vec{e}_y + y\vec{e}_x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z'}{\sqrt{x'^2+y^2+z'^2}^3} \mathrm{d}x' \\
&= -\frac{J_{\mathrm{F}0}}{4\pi} \int_{-a}^{a} (x'\vec{e}_y + y\vec{e}_x) \left[\frac{z'}{(x'^2+y^2)\sqrt{x'^2+y^2+z'^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' = -\frac{J_{\mathrm{F}0}}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{x'\vec{e}_y + y\vec{e}_x}{x'^2+y^2} \mathrm{d}x' \\
&= -\frac{J_{\mathrm{F}0}}{2\pi} \left(\vec{e}_y \int_{-a}^{a} \frac{x'\mathrm{d}x'}{x'^2+y^2} + y\vec{e}_x \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x'}{x'^2+y^2} \right) \\
&\overset{61\ 57}{=} -\frac{J_{\mathrm{F}0}}{2\pi} \left(\vec{e}_y \underbrace{\left[\frac{1}{2} \ln\left|x'^2+y^2\right| \right]_{-a}^{a}}_{=0} + y\vec{e}_x \left[\frac{1}{y} \arctan\left(\frac{x'}{y}\right) \right]_{-a}^{a} \right) = \underline{-\frac{J_{\mathrm{F}0}}{\pi} \arctan\left(\frac{a}{y}\right) \vec{e}_x}
\end{aligned}$$

[57] Integral #57 nach BRONSTEIN, *Taschenbuch der Mathematik*:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{X} = \frac{1}{a} Y \qquad \text{mit} \qquad X = x^2 + a^2 \quad \text{und} \quad Y = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

[61] Integral #61 nach BRONSTEIN, *Taschenbuch der Mathematik*:

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{X} = \frac{1}{2} \ln X \qquad \text{mit} \qquad X = x^2 + a^2$$

12.6 Zylinderspule mit n Windungen

Für die Anwendung des BIOT-SAVART-Gesetzes bestimmt man zunächst die als homogen angenommene Stromdichte der Spulenanordnung aus deren Querschnittsfläche $A = H\Delta\varrho = 2h(b-a)$ und dem durch die n Windungen in Tangentialrichtung fließenden Strom I_0 wie folgt

$$\vec{J} = J\vec{e}_\varphi = \frac{I}{A}\vec{e}_\varphi = \underline{\frac{nI_0}{2h(b-a)}\vec{e}_\varphi}$$

Die Berechnung der magnetischen Feldstärke am Ort $\vec{r} = z\vec{e}_z$ auf der z-Achse erfolgt nun wie in Aufgabe 12.5, wobei es sich hier allerdings um eine räumliche Stromdichteverteilung handelt und der Quellpunktvektor in Zylinderkoordinaten durch $\vec{r}' = z'\vec{e}_z + \varrho'\vec{e}_\varrho$ mit $\varrho' \in [a;b]$, $\varphi' \in [0;2\pi]$ und $z' \in [-h;h]$ beschrieben wird. Dementsprechend gilt

$$\begin{aligned}
\vec{H}(z) &= \frac{1}{4\pi}\iiint \vec{J}(\vec{r}')\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{nI_0}{2h(b-a)}\vec{e}_\varphi\times\frac{(z-z')\vec{e}_z-\varrho'\vec{e}_\varrho}{\sqrt{(z-z')^2+\varrho'^2}^3}\varrho'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}\varrho'\mathrm{d}z' \\
&= \frac{nI_0}{8\pi h(b-a)}\int_{-h}^{h}\int_{a}^{b}\int_{0}^{2\pi}\frac{(z-z')\varrho'\vec{e}_\varrho+\varrho'^2\vec{e}_z}{\sqrt{(z-z')^2+\varrho'^2}^3}\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}\varrho'\mathrm{d}z' \\
&= \frac{nI_0}{8\pi h(b-a)}\int_{-h}^{h}\int_{a}^{b}\left[\frac{(z-z')\varrho'}{\sqrt{(z-z')^2+\varrho'^2}^3}\underbrace{\int_0^{2\pi}\vec{e}_\varrho\mathrm{d}\varphi'}_{=\vec{0}}+\frac{\varrho'^2\vec{e}_z}{\sqrt{(z-z')^2+\varrho'^2}^3}\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'}_{=2\pi}\right]\mathrm{d}\varrho'\mathrm{d}z' \\
&= \frac{nI_0}{4h(b-a)}\vec{e}_z\int_a^b\int_{-h}^{h}\frac{\mathrm{d}z'}{\sqrt{(z-z')^2+\varrho'^2}^3}\varrho'^2\mathrm{d}\varrho' = \frac{nI_0}{4h(b-a)}\vec{e}_z\int_a^b\left[\frac{-(z-z')}{\varrho'^2\sqrt{(z-z')^2+\varrho'^2}}\right]_{-h}^{h}\varrho'^2\mathrm{d}\varrho' \\
&= \frac{nI_0}{4h(b-a)}\vec{e}_z\int_a^b\left(\frac{z+h}{\sqrt{(z+h)^2+\varrho'^2}}-\frac{z-h}{\sqrt{(z-h)^2+\varrho'^2}}\right)\mathrm{d}\varrho' \\
&\overset{192}{=} \frac{nI_0}{4h(b-a)}\left[(z+h)\ln\left|\varrho'+\sqrt{(z+h)^2+\varrho'^2}\right|-(z-h)\ln\left|\varrho'+\sqrt{(z-h)^2+\varrho'^2}\right|\right]_a^b\vec{e}_z \\
&= \underline{\frac{nI_0}{4h(b-a)}\left[(z+h)\ln\left(\frac{b+\sqrt{(z+h)^2+b^2}}{a+\sqrt{(z+h)^2+a^2}}\right)-(z-h)\ln\left(\frac{b+\sqrt{(z-h)^2+b^2}}{a+\sqrt{(z-h)^2+a^2}}\right)\right]\vec{e}_z}
\end{aligned}$$

[192] Integral #192 nach BRONSTEIN, *Taschenbuch der Mathematik*:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \ln\left(x+\sqrt{X}\right)+C_1 \qquad \text{mit} \qquad X = x^2+a^2 \quad \text{und} \quad C_1\in\mathbb{R}$$

12.7 Helmholtzspule

Die aus zwei kreisförmigen Leiterschleifen mit Radius a und Mittelpunkt bei $z = \pm\frac{a}{2}$ bestehende und gleichsinnig vom Strom I durchflossene HELMHOLTZ-Spule erzeugt an einem Punkt $\vec{r} = z\vec{e}_z$ auf der z-Achse das Magnetfeld $\vec{H}(z)$, welches sich wieder durch Superposition der magnetischen Feldstärken beider Ringströme ergibt. Ähnlich wie in Aufgabe 12.3 für eine einzelne kreisförmige Leiterschleife berechnet man hier mit den Quellpunktvektoren $\vec{r}'_{1/2} = \mp\frac{a}{2}\vec{e}_z + a\vec{e}_\varrho$ und dem Wegelement $\mathrm{d}\vec{r}'_{1/2} = a\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$

$$\begin{aligned}\vec{H}_{1/2}(z) &= \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi\times\left((z\pm\frac{a}{2})\vec{e}_z - a\vec{e}_\varrho\right)}{\sqrt{(z\pm\frac{a}{2})^2+a^2}^3} = \frac{Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi\left((z\pm\frac{a}{2})\vec{e}_\varrho + a\vec{e}_z\right)}{\sqrt{(z\pm\frac{a}{2})^2+a^2}^3}\\ &= \frac{I}{4\pi}\frac{a}{\sqrt{(z\pm\frac{a}{2})^2+a^2}^3}\left(\left(z\pm\frac{a}{2}\right)\underbrace{\int_0^{2\pi}\vec{e}_\varrho\mathrm{d}\varphi}_{=\vec{0}} + a\vec{e}_z\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi}_{=2\pi}\right) = \frac{I}{2}\frac{a^2}{\sqrt{(z\pm\frac{a}{2})^2+a^2}^3}\vec{e}_z\end{aligned}$$

und es folgt insgesamt

$$\vec{H}(z) = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \underline{\frac{I}{2}a^2\left(\frac{1}{\sqrt{(z+\frac{a}{2})^2+a^2}^3} + \frac{1}{\sqrt{(z-\frac{a}{2})^2+a^2}^3}\right)\vec{e}_z}$$

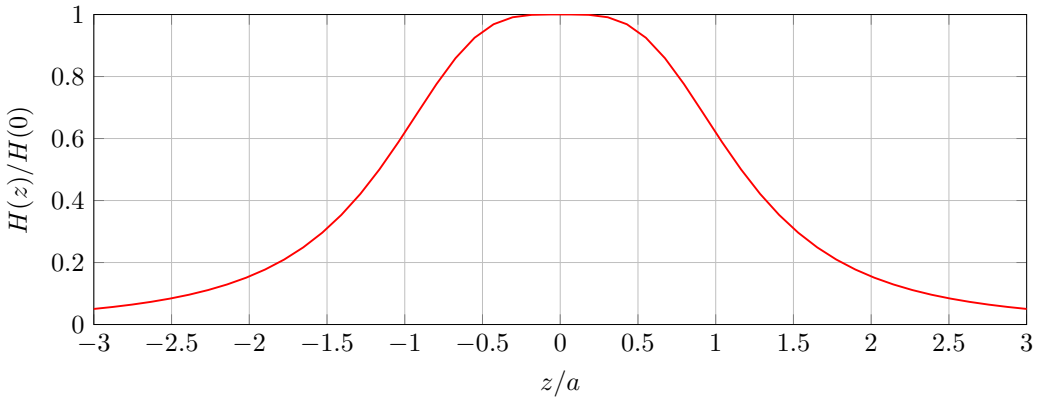


Abbildung 12.1: Normierter Verlauf der Feldstärke $H(\frac{z}{a})$ auf der z-Achse

12.8 Gleichseitiges n-Eck

Betrachtet man eine vom Strom I durchflossene Leiterschleife in Form eines gleichseitigen n-Ecks in der xy-Ebene, dessen Eckpunkte auf einem Kreis mit Radius a liegen, so lässt sich für die Berechnung des Magnetfeldes am Ort $\vec{r} = z\vec{e}_z$ die Regelmäßigkeit bzw. Drehsymmetrie der Anordnung nutzen. Da die Betrachtung auf geradzahlige n mit $n \geq 4$ beschränkt ist, besteht das n-Eck stets aus Paaren gegenüber liegender, paralleler Leitersegmente, deren radiale Feldkomponenten sich an einem Punkt auf der z-Achse gegenseitig kompensieren (Abbildung 12.2).

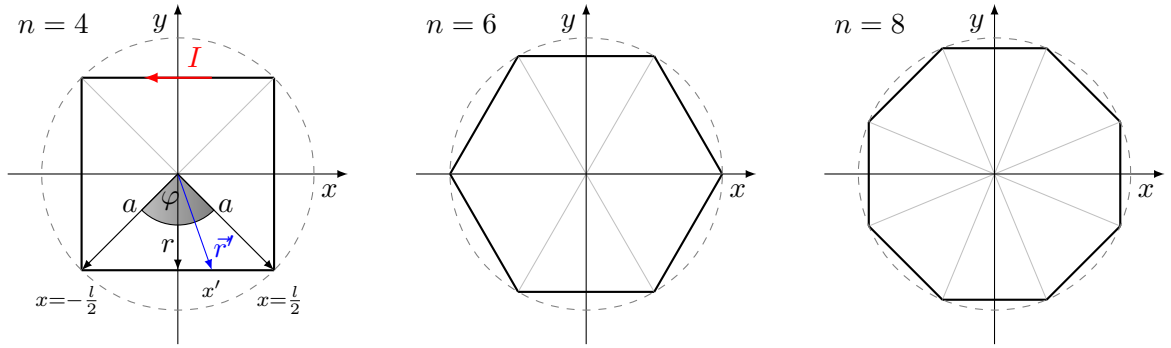


Abbildung 12.2: Regelmäßige n-Eck-Leiterschleife, welche vom Strom I durchflossen wird; beispielhaft für $n = 4, 6, 8$ zur Verdeutlichung der geometrischen Verhältnisse

Zur Berechnung des Feldstärkeanteils $\vec{H}_S(z)$ eines solchen Segmentpaares benötigt man zunächst die Länge l und den Abstand r eines Leitersegmentes vom Ursprung, welche über die Winkelbeziehungen im rechtwinkligen Dreieck bestimmt werden können.

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) &= \frac{l}{2a} \quad \Rightarrow \quad \underline{l = 2a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \\ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) &= \frac{r}{a} \quad \Rightarrow \quad \underline{r = a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \qquad \text{mit } \underline{\varphi = \frac{2\pi}{n}} \end{aligned}$$

Exemplarisch wird die Berechnung für die beiden parallel zur x-Achse ausgerichteten Elemente mit den Quellpunktvektoren $\vec{r}'_{\mp} = x'\vec{e}_x \mp r\vec{e}_y$ und Wegelementen $\mathrm{d}\vec{r}'_{\mp} = \mathrm{d}x'\vec{e}_x$ im Bereich von $x' \in [-\frac{l}{2}; \frac{l}{2}]$ vorgenommen. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{H}_{S\mp}(z) &= \frac{I}{4\pi}\int_{\mp\frac{l}{2}}^{\pm\frac{l}{2}} \frac{\mathrm{d}x'\vec{e}_x \times (-x'\vec{e}_x \pm r\vec{e}_y + z\vec{e}_z)}{\sqrt{x'^2 + r^2 + z^2}^3} = \pm\frac{I}{4\pi} 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\mathrm{d}x'(\pm r\vec{e}_z - z\vec{e}_y)}{\sqrt{x'^2 + r^2 + z^2}^3} \\ &= \frac{I}{2\pi}(r\vec{e}_z \mp z\vec{e}_y)\left[\frac{x'}{(r^2+z^2)\sqrt{x'^2 + r^2 + z^2}}\right]_0^{\frac{l}{2}} = \underline{\frac{I}{4\pi}\frac{r\vec{e}_z \mp z\vec{e}_y}{r^2+z^2}\frac{l}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 + z^2}}} \end{aligned}$$

Aufgrund der Drehsymmetrie entspricht dieser Feldanteil den Beiträgen der übrigen diametralen Leiterpaare, sodass zur Bestimmung der vom gesamten n-Eck-Leiter hervorgerufenen magnetischen Feldstärke lediglich alle $\frac{n}{2}$ Paare paralleler Seiten zu berücksichtigen sind. Insgesamt folgt damit

$$\begin{aligned} \vec{H}(z) &= \frac{n}{2}\left(\vec{H}_{S-} + \vec{H}_{S+}\right) = \frac{n}{2}\cdot\frac{I}{4\pi}\frac{r\vec{e}_z - z\vec{e}_y + r\vec{e}_z + z\vec{e}_y}{r^2+z^2}\frac{l}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 + z^2}} \\ &= \underline{n\cdot\frac{I}{4\pi}\frac{r}{r^2+z^2}\frac{l}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 + z^2}}\vec{e}_z} \end{aligned}$$

Die Korrektheit dieses Ergebnisses lässt sich z.B. durch Betrachtung des Grenzwertes für $n \to \infty$ überprüfen. In diesem Fall laufen Segmentwinkel φ und Segmentlänge l gegen Null, der Abstand r nähert sich dem Radius a an und der Umfang $n \cdot l$ konvergiert gegen den Kreisumfang $2\pi a$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \varphi_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n} = 0 \\
\lim_{n\to\infty} r_n &= \lim_{n\to\infty} a\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = a\cos(0) = a \\
\lim_{n\to\infty} l_n &= \lim_{n\to\infty} 2a\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2a\sin(0) = 0 \\
\lim_{n\to\infty} n\cdot l_n &= 2a \lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2a \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} 2a \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{\pi}{n^2}\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{-\frac{1}{n^2}} \\
&= 2\pi a \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi a\cos(0) = 2\pi a
\end{aligned}$$

Das n-Eck wird schließlich zu einem Kreis und es wäre dementsprechend die gleiche Magnetfeldstärke wie bei einer kreisförmigen Leiterschleife zu erwarten. Einsetzen der obigen Grenzwerte in die Gleichung der magnetischen Feldstärke führt auf folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \vec{H}(z) &= \frac{I}{4\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{r_n^2 + z^2} \frac{n\cdot l_n}{\sqrt{\left(\frac{l_n}{2}\right)^2 + r_n^2 + z^2}} \vec{e}_z \\
&= \frac{I}{4\pi} \frac{a}{a^2+z^2} \frac{2\pi a}{\sqrt{a^2+z^2}} \vec{e}_z = \underline{\frac{I}{2} \frac{a^2}{\sqrt{a^2+z^2}^3} \vec{e}_z}
\end{aligned}$$

Dies entspricht, wie vermutet, der bereits in Aufgabe 12.3 berechneten Feldstärke einer stromdurchflossenen Kreisschleife.

12.9 Halbkreisförmige Leiterschleife

Für den entlang der x-Achse verlaufenden und als Halbkreis mit dem Radius a um den Ursprung herumgeführten Leiter, welcher vom Strom I durchflossen wird, bestimmt sich die magnetische Feldstärke an einem Punkt auf der z-Achse bei $\vec{r} = z\vec{e}_z$ aus der Superposition der Magnetfeldbeiträge der einzelnen Leiterabschnitte. Das Kreisbogensegment von $\varphi = \pi$ bis $\varphi = 0$ mit dem Quellpunktvektor $\vec{r}' = a\vec{e}_\varrho$ und dem Wegelement $\mathrm{d}\vec{r}' = a\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$ generiert dabei ein Magnetfeld $\vec{H}_R$, für das gilt

$$\begin{aligned}
\vec{H}_R(z) &= \frac{I}{4\pi}\int_\pi^0 \frac{a\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi \times (z\vec{e}_z - a\vec{e}_\varrho)}{\sqrt{z^2+a^2}^3} = \frac{Ia}{4\pi}\int_\pi^0 \frac{\mathrm{d}\varphi(z\vec{e}_\varrho + a\vec{e}_z)}{\sqrt{z^2+a^2}^3} \\
&= \frac{I}{4\pi}\frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}^3}\left(z\int_\pi^0 \underbrace{(\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y)}_{=\vec{e}_\varrho}\mathrm{d}\varphi + a\vec{e}_z\int_\pi^0 \mathrm{d}\varphi\right) \\
&= \frac{I}{4\pi}\frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}^3}\left(z\left(\vec{e}_x\underbrace{\left[\sin\varphi\right]_\pi^0}_{=0} + \vec{e}_y\underbrace{\left[-\cos\varphi\right]_\pi^0}_{=-2}\right) - a\pi\vec{e}_z\right) \\
&= \underline{-\frac{I}{4\pi}\frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}^3}\left(2z\vec{e}_y + a\pi\vec{e}_z\right)}
\end{aligned}$$

Der geradlinige Teil des Leiters, beschrieben durch den Quellpunktvektor $\vec{r}' = x'\vec{e}_x$ und das Wegelement $\mathrm{d}\vec{r}' = \mathrm{d}x'\vec{e}_x$ in den Grenzen von $x' \in (-\infty; -a]$ bzw. $x' \in [a; \infty)$, erzeugt den Anteil $\vec{H}_x$ zum Gesamtfeld. Dieser berechnet sich folgendermaßen

$$\begin{aligned}
\vec{H}_{\mp x}(z) &= \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{-a} \frac{\mathrm{d}x'\vec{e}_x \times (z\vec{e}_z - x'\vec{e}_x)}{\sqrt{z^2+x'^2}^3} = \mp\frac{I}{4\pi}\int_{\mp a}^{\mp\infty} \frac{-z\mathrm{d}x'\vec{e}_y}{\sqrt{z^2+x'^2}^3} = \pm\frac{Iz}{4\pi}\vec{e}_y\int_{\mp a}^{\mp\infty} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{z^2+x'^2}^3} \\
&= \pm\frac{Iz}{4\pi}\vec{e}_y\left[\frac{x'}{z^2\sqrt{z^2+x'^2}}\right]_{\mp a}^{\mp\infty} = \pm\frac{I}{4\pi z}\left(\mp 1 - \frac{\mp a}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\vec{e}_y = -\frac{I}{4\pi z}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\vec{e}_y \\
\vec{H}_x(z) &= \vec{H}_{-x} + \vec{H}_{+x} = \underline{-\frac{I}{2\pi z}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\vec{e}_y}
\end{aligned}$$

Anstatt das Magnetfeld $\vec{H}_x(z)$ als Summe der Beiträge beider Leiterstücke links und rechts des Halbkreises zu berechnen, ist es hier ebenso möglich, sich den im Intervall $[-a, a]$ unterbrochenen Strom I als Überlagerung eines in positive Richtung fließenden Stromes entlang der gesamten x-Achse und eines entgegengesetzt gerichteten, gleich großen Stromes im ausgesparten Bereich vorzustellen, der diesen dort wieder kompensiert. Entsprechend kann man dann schreiben

$$\begin{aligned}
\vec{H}_x(z) &= \frac{I}{4\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-z\mathrm{d}x'\vec{e}_y}{\sqrt{z^2+x'^2}^3} + \int_a^{-a} \frac{-z\mathrm{d}x'\vec{e}_y}{\sqrt{z^2+x'^2}^3}\right) = -\frac{Iz}{4\pi}\left(2\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{z^2+x'^2}^3} - 2\int_0^{a} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{z^2+x'^2}^3}\right)\vec{e}_y \\
&= -\frac{Iz}{2\pi}\left(\left[\frac{x'}{z^2\sqrt{z^2+x'^2}}\right]_0^{\infty} - \left[\frac{x'}{z^2\sqrt{z^2+x'^2}}\right]_0^{a}\right)\vec{e}_y = \underline{-\frac{I}{2\pi z}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\vec{e}_y}
\end{aligned}$$

Als Ergebnis erhält man damit für die Gesamtfeldstärke

$$\vec{H}_{\mathrm{Ges}}(z) = \vec{H}_R + \vec{H}_x = \underline{-\frac{I}{4\pi}\left[\frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}^3}\left(2z\vec{e}_y + a\pi\vec{e}_z\right) + 2\left(\frac{1}{z} - \frac{a}{z\sqrt{z^2+a^2}}\right)\vec{e}_y\right]}$$

13 Quasimagnetostatik - Diffusionsgleichung und Skineffekt

13.1 Rechteckiger Leiter zwischen zwei hochpermeablen Ebenen

Die Berechnung der gesuchten Feldgrößen erfolgt mithilfe der Diffusionsgleichung, wie sie bereits in Aufgabe 2.7 für das Magnetfeld hergeleitet wurde. Bei harmonischer Zeitabhängigkeit gilt analog für das magnetische Vektorpotential

$$\triangle \underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \mathrm{j}\omega\mu\kappa\underline{\vec{A}}(\vec{r})$$

Weiterhin folgt aus dem Induktionsgesetz der MAXWELLschen Gleichungen der Zusammenhang zwischen elektrischem Feld und dem magnetischen Vektorpotential

$$\operatorname{rot}\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{rot}\underline{\vec{A}}\right) = -\operatorname{rot}\left(\frac{\partial\underline{\vec{A}}}{\partial t}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial\underline{\vec{A}}}{\partial t}$$

und die Materialgleichung für die Stromdichte lässt sich dementsprechend schreiben als

$$\underline{\vec{J}} = \kappa\underline{\vec{E}} = -\kappa\frac{\partial\underline{\vec{A}}}{\partial t} = -\mathrm{j}\omega\kappa\underline{\vec{A}}$$

Damit sind Stromdichte und Vektorpotential also parallel zueinander orientiert und mit der gegebenen Stromrichtung $\underline{\vec{J}} = \underline{J}_z\vec{e}_z$ gilt gleichermaßen $\underline{\vec{A}} = \underline{A}_z\vec{e}_z$, d.h. das Vektorpotential besitzt nur eine Komponente in z-Richtung.

Die dargestellte Anordnung des Rechteckleiters kann nun durch Spiegelung des in ihm fließenden Stromes an den beiden hochpermeablen (d.h. ideal magnetischen) Ebenen in eine Ersatzanordnung mit einer in y-Richtung unendlich ausgedehnten Stromverteilung überführt werden, womit keinerlei Abhängigkeit der Feldgrößen von y mehr besteht. Gleiches gilt bereits für die Abhängigkeit in z-Richtung, da es sich laut Aufgabenstellung um einen sehr langen Leiter entlang der z-Achse handelt. Folglich sind alle partiellen Ableitungen nach y und z Null und die Diffusionsgleichung vereinfacht sich zu

$$\triangle\underline{\vec{A}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}_{=0}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\\underline{A}_z\end{pmatrix} = \underline{\frac{\partial^2\underline{A}_z}{\partial x^2}\vec{e}_z = \mathrm{j}\omega\mu\kappa\underline{A}_z\vec{e}_z}$$

Für die magnetische Flussdichte folgt mit dieser Vereinfachung

$$\mu\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{B}} = \begin{pmatrix}\underline{B}_x\\\underline{B}_y\\\underline{B}_z\end{pmatrix} = \operatorname{rot}\underline{\vec{A}} = \begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & \underline{A}_z\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{\partial}{\partial x}\underline{A}_z\\0\end{pmatrix} = -\frac{\partial\underline{A}_z}{\partial x}\vec{e}_y$$

Obige Diffusionsgleichung ist nun in den jeweiligen Gebieten zu lösen, wobei sich die Lösung für die beiden äußeren Bereiche aufgrund der fehlenden Leitfähigkeit $\kappa = 0$ recht einfach gestaltet.

Gebiet I ($x < -a$) mit $\kappa = 0$, $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\underline{A}_{z1}(x) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\underline{A}_{z1}(x) &= C_1 \\ \underline{A}_{z1}(x) &= C_1x + C_2\end{aligned}$$

Gebiet III ($x > a$) mit $\kappa = 0$, $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\underline{A}_{z3}(x) &= 0 && \Big|\int \mathrm{d}x \\ \frac{\partial}{\partial x}\underline{A}_{z3}(x) &= C_5 && \Big|\int \mathrm{d}x \\ \underline{A}_{z3}(x) &= C_5x + C_6\end{aligned}$$

Im Leitergebiet mit $\kappa \neq 0$ bietet sich zur Lösung der partiellen Differentialgleichung dagegen die allgemeine Lösung mit Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus an

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\underline{A}_{z2} - \underbrace{\mathrm{j}\omega\mu\kappa}_{=:\alpha^2}\underline{A}_{z2} &= 0 \\
\underline{A}_{z2}(x) &= C_3\sinh(\alpha x) + C_4\cosh(\alpha x) \\
\underline{H}_{y2}(x) = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \underline{A}_{z2}}{\partial x} &= -\frac{\alpha}{\mu}\Big(C_3\cosh(\alpha x) + C_4\sinh(\alpha x)\Big)
\end{aligned}$$

Diese Darstellung hat gegenüber der Exponentialdarstellung den Vorteil, dass sich die Summe aus der geraden cosh-Funktion und der ungeraden sinh-Funktion besser zur Auswertung der Symmetrieeigenschaft des Magnetfeldes eignet. Da dieses den Leiter - in negativer z-Richtung betrachtet - im Gegenuhrzeigersinn „umwirbelt“, muss $\underline{H}_y(-x) = -\underline{H}_y(x)$ gelten, die Funktion $\underline{H}_y(x)$ also insgesamt ungerade sein, womit für die Konstante $\underline{C_3 = 0}$ und als Zwischenergebnis

$$\underline{A}_{z2}(x) = C_4\cosh(\alpha x) \qquad\qquad \underline{H}_{y2}(x) = -\frac{\alpha}{\mu}C_4\sinh(\alpha x)$$

folgt. Zur Bestimmung der übrigen Integrationskonstanten $C_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, 4, 5, 6)$ betrachtet man nun das Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke um die Leiterquerschnittsfläche, welches den eingeschlossenen Strom $\underline{I} = I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ liefert. Da das Magnetfeld $\underline{\vec{H}}$ wie die magnetische Flussdichte $\underline{\vec{B}}$ nur eine y-Komponente aufweist, sind die Wegbeiträge in x-Richtung Null und es gilt entsprechend

$$\begin{aligned}
\underline{I} &= \oint_{\partial A}\underline{\vec{H}}\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^h \underline{H}_y(a)\vec{e}_y\mathrm{d}y\vec{e}_y + \underbrace{\int_a^{-a}\underline{H}_x(h)\vec{e}_x\mathrm{d}x\vec{e}_x}_{=0} + \int_h^0 \underline{H}_y(-a)\vec{e}_y\mathrm{d}y\vec{e}_y + \underbrace{\int_{-a}^{a}\underline{H}_x(0)\vec{e}_x\mathrm{d}x\vec{e}_x}_{=0} \\
&= \underline{h\big(\underline{H}_y(a) - \underline{H}_y(-a)\big) = 2h\underline{H}_y(a)}
\end{aligned}$$

Hieraus können nun C_1, C_4 und C_5 direkt ermittelt werden

$$\begin{aligned}
\underline{H}_y(a) &= -\frac{1}{\mu}\left.\frac{\partial \underline{A}_{z3}}{\partial x}\right|_{x=+a} = -\frac{C_5}{\mu} = \frac{\underline{I}}{2h} \quad \Rightarrow \quad \underline{C_5 = -\frac{\mu\underline{I}}{2h}} \\
\underline{H}_y(-a) &= -\frac{1}{\mu}\left.\frac{\partial \underline{A}_{z1}}{\partial x}\right|_{x=-a} = -\frac{C_1}{\mu} = -\frac{\underline{I}}{2h} \quad \Rightarrow \quad \underline{C_1 = \frac{\mu\underline{I}}{2h}} \\
\underline{H}_y(a) &= \underline{H}_{y2}(a) = -\frac{\alpha}{\mu}C_4\sinh(\alpha a) = \frac{\underline{I}}{2h} \quad \Rightarrow \quad \underline{C_4 = -\frac{\mu\underline{I}}{2h\alpha}\frac{1}{\sinh(\alpha a)}}
\end{aligned}$$

womit sich die Magnetfeldstärke im gesamten Raum zwischen den Ebenen wie folgt ergibt

$$\underline{H}_y(x) = \begin{cases} -\frac{\underline{I}}{2h} & : \quad x < -a \\ \frac{\underline{I}}{2h}\frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha a)} & : -a \leq x \leq a \\ \frac{\underline{I}}{2h} & : \quad x > a \end{cases}$$

Die verbleibenden noch unbekannten Integrationskonstanten C_2 und C_6 in den Gleichungen des Vektorpotentials erhält man schließlich aus den Stetigkeitsbedingungen der Tangentialkomponente von $\vec{A}$ an der Grenzfläche des Leiters

$$\begin{aligned} \underline{A}_{z1}(-a) = -\frac{\mu \underline{I}}{2h}a + C_2 &= -\frac{\mu \underline{I}}{2h\alpha}\frac{\cosh(-\alpha a)}{\sinh(\alpha a)} = \underline{A}_{z2}(-a) \\ \Rightarrow \qquad C_2 &= \underline{\frac{\mu \underline{I}}{2h}\left[a - \frac{1}{\alpha}\frac{\cosh(\alpha a)}{\sinh(\alpha a)}\right]} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \underline{A}_{z2}(a) = -\frac{\mu \underline{I}}{2h\alpha}\frac{\cosh(\alpha a)}{\sinh(\alpha a)} &= -\frac{\mu \underline{I}}{2h}a + C_6 = \underline{A}_{z3}(a) \\ \Rightarrow \qquad C_6 &= \underline{\frac{\mu \underline{I}}{2h}\left[a - \frac{1}{\alpha}\frac{\cosh(\alpha a)}{\sinh(\alpha a)}\right]} \end{aligned}$$

Insgesamt gilt für das Vektorpotential also

$$\underline{A}_z(x) = \begin{cases} \frac{\mu \underline{I}}{2h}\left[\; x + a - \frac{1}{\alpha}\frac{\cosh(\alpha a)}{\sinh(\alpha a)}\right] & : \quad x < -a \\ \frac{\mu \underline{I}}{2h}\left[\; - \frac{1}{\alpha}\frac{\cosh(\alpha x)}{\sinh(\alpha a)}\right] & : -a \le x \le a \\ \frac{\mu \underline{I}}{2h}\left[-x + a - \frac{1}{\alpha}\frac{\cosh(\alpha a)}{\sinh(\alpha a)}\right] & : \quad x > a \end{cases}$$

und die Stromdichte folgt mit $\underline{\vec{J}}(x) = -\mathrm{j}\omega\kappa\underline{\vec{A}}(x)$ zu

$$\underline{J}_z(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < -a \\ \frac{\alpha \underline{I}}{2h}\frac{\cosh(\alpha x)}{\sinh(\alpha a)} & : -a \le x \le a \\ 0 & : \quad x > a \end{cases}$$

13.2 Leiter in der Nut eines hochpermeablen Körpers

Mit dem gleichen Ansatz wie in Aufgabe 13.1 lässt sich auch hier das Vektorpotential $\underline{\vec{A}}(\vec{r})$, die magnetische Feldstärke $\underline{\vec{H}}(\vec{r})$ und die Stromdichte $\underline{\vec{J}}(\vec{r})$ im Leitergebiet der vorliegenden Anordnung berechnen. Aus der gegebenen Stromrichtung mit $\underline{\vec{J}} = \underline{J}_z\vec{e}_z$ und dem Zusammenhang

$$\underline{\vec{J}} = \kappa\underline{\vec{E}} = -\kappa\frac{\partial\underline{\vec{A}}}{\partial t} = -\mathrm{j}\omega\kappa\underline{\vec{A}}$$

folgt wiederum, dass auch das Vektorpotential nur eine z-Komponente aufweist und somit $\underline{\vec{A}} = \underline{A}_z\vec{e}_z$ gilt. Durch Spiegelung des Leiterstromes an den drei Seitenwänden des hochpermeablen Körpers erhält man zunächst eine Ersatzanordnung mit einer in y- und z-Richtung unendlich ausgedehnten Stromdichteverteilung, weshalb die jeweiligen partiellen Ableitungen aufgrund der fehlenden Abhängigkeit von der y- und z-Koordinate Null sind. Entsprechend vereinfacht sich die Diffusionsgleichung für $\underline{\vec{A}}$ zu

$$\triangle\,\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \mathrm{j}\omega\mu\kappa\underline{\vec{A}}(\vec{r}) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2\underline{A}_z}{\partial x^2}\vec{e}_z = \mathrm{j}\omega\mu\kappa\underline{A}_z\vec{e}_z$$

und zur Bestimmung des Magnetfeldes $\underline{\vec{H}}$ genügt die Gleichung

$$\mathrm{rot}\,\underline{\vec{A}} = -\frac{\partial\underline{A}_z(x)}{\partial x}\vec{e}_y = \underline{B}_y\vec{e}_y = \mu\underline{H}_y\vec{e}_y$$

Im Bereich des Leiters für $x \in [-a;0]$ mit $\mu = \mu_0$ und $\kappa \neq 0$ ist nun obige partielle Differentialgleichung zu lösen, wobei sich für Vektorpotential und Magnetfeld die allgemeine Lösung wie folgt ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\underline{A}_z(x) &= \underbrace{\mathrm{j}\omega\mu_0\kappa}_{=:\alpha^2}\underline{A}_z(x) = \alpha^2\underline{A}_z(x)\\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\underline{A}_z(x) - \alpha^2\underline{A}_z(x) &= 0\\
\Rightarrow \qquad \underline{A}_z(x) &= C_1\sinh(\alpha x) + C_2\cosh(\alpha x)\\
\underline{H}_y(x) &= -\frac{\alpha}{\mu_0}\Big(C_1\cosh(\alpha x) + C_2\sinh(\alpha x)\Big) \qquad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Die beiden noch unbekannten Konstanten können schließlich mithilfe des Durchflutungsgesetzes der MAXWELLschen Gleichungen aus dem Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke entlang der Berandung der Leiterquerschnittsfläche bestimmt werden. Integrationswege in x-Richtung liefern hierbei keinen Beitrag, da das Magnetfeld nur eine y-Komponente besitzt. Ebenso muss das Feld am Nutgrund bei $x = -a$ infolge des ideal magnetisch leitfähigen Mediums verschwinden, sodass insgesamt gilt

$$\underline{I} = \oint_{\partial A}\underline{\vec{H}}\mathrm{d}\vec{r} = \int_{-a}^{0}\underbrace{\underline{H}_x\left(-\frac{a}{2}\right)}_{=0}\mathrm{d}x + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\underline{H}_y(0)\mathrm{d}y + \int_{0}^{-a}\underbrace{\underline{H}_x\left(\frac{a}{2}\right)}_{=0}\mathrm{d}x + \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}}\underbrace{\underline{H}_y(-a)}_{=0}\mathrm{d}y = a\underline{H}_y(0)$$

Mit diesen Bedingungen folgt für C_1 und C_2

$$\begin{aligned}
\underline{H}_y(0) &= -\frac{\alpha}{\mu_0}\Big(C_1\underbrace{\cosh(0)}_{=1} + C_2\underbrace{\sinh(0)}_{=0}\Big) = -\frac{\alpha}{\mu_0}C_1 \stackrel{!}{=} \frac{\underline{I}}{a} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{C_1 = -\frac{\mu_0\underline{I}}{a\alpha}}\\
\underline{H}_y(-a) &= -\frac{\alpha}{\mu_0}\left(-\frac{\mu_0\underline{I}}{a\alpha}\cosh(-a\alpha) + C_2\sinh(-a\alpha)\right) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{C_2 = -\frac{\mu_0\underline{I}}{a\alpha}\frac{\cosh(a\alpha)}{\sinh(a\alpha)}}
\end{aligned}$$

und die Lösung lautet demgemäß

$$\begin{aligned}
\underline{A}_z(x) &= -\frac{\mu_0\underline{I}}{a\alpha}\left[\sinh(\alpha x) + \frac{\cosh(\alpha x)}{\tanh(a\alpha)}\right]\\
\underline{J}_z(x) = -\mathrm{j}\omega\kappa\underline{A}_z(x) &= \frac{\alpha\underline{I}}{a}\left[\sinh(\alpha x) + \frac{\cosh(\alpha x)}{\tanh(a\alpha)}\right]\\
\underline{H}_y(x) &= \underline{\frac{\underline{I}}{a}\left[\cosh(\alpha x) + \cosh(a\alpha)\frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(a\alpha)}\right]}
\end{aligned}$$

13.3 Zwei rechteckige Leiter in der Nut eines hochpermeablen Körpers

Analog zu den beiden vorigen Aufgaben 13.1 und 13.2 wählt man als Ansatz wiederum die Diffusionsgleichung des Vektorpotentials $\vec{\underline{A}}(\vec{r})$ und vereinfacht diese entsprechend der vorgegebenen Randbedingungen. Für das Vektorpotential folgt mit der Richtung des Stromes bzw. der Stromdichte $\vec{\underline{J}}$ im Leiter aufgrund der Beziehung

$$\vec{\underline{J}} = \kappa\vec{\underline{E}} = -\kappa\frac{\partial\vec{\underline{A}}}{\partial t} = -\mathrm{j}\omega\kappa\vec{\underline{A}}$$

zunächst, dass dieses ebenso nur eine z-Komponente besitzt, also dass $\vec{\underline{A}} = \underline{A}_z\vec{e}_z$ ist. Durch Spiegelung an den Wandflächen der Nut des hochpermeablen Körpers, in welcher sich der in z-Richtung unendlich ausgedehnte und den Strom $i(t) = I_0\cos(\omega t)$ führende rechteckige Leiter befindet, kann dieser in eine sich unendlich in x-Richtung erstreckende Stromdichteverteilung überführt werden, womit lediglich die Abhängigkeit von y verbleibt und alle partiellen Ableitungen nach x und z verschwinden. Die Diffusionsgleichung lautet in diesem Fall

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\underline{A}_z(y)\vec{e}_z = \mathrm{j}\omega\mu\kappa\underline{A}_z(y)\vec{e}_z$$

und für das Magnetfeld $\vec{\underline{H}}$, welches man durch Bildung der Rotation von $\vec{\underline{A}}$ erhält, resultiert

$$\operatorname{rot}\vec{\underline{A}} = \ldots = \frac{\partial}{\partial y}\underline{A}_z(y)\vec{e}_x = \underline{B}_x\vec{e}_x = \mu\underline{H}_x\vec{e}_x$$

Als allgemeine Lösung der Diffusionsgleichung im Gebiet des stromdurchflossenen Leiters und des darüber befindlichen stromlosen Leiters mit der Leitfähigkeit κ und der Permeabilität μ_0 ergibt sich

Gebiet I ($y \in [-b;0]$) mit $\kappa \neq 0$, $\mu = \mu_0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2}\underline{A}_{z1}(y) &= \underbrace{\mathrm{j}\omega\mu_0\kappa}_{=:\alpha^2}\underline{A}_{z1}(y) = \alpha^2\underline{A}_{z1}(y)\\
\underline{A}_{z1}(y) &= C_1\sinh(\alpha y) + C_2\cosh(\alpha y)\\
\underline{H}_{x1}(y) &= \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial y}\underline{A}_{z1}(y)\\
&= \frac{\alpha}{\mu_0}\Big(C_1\cosh(\alpha y) + C_2\sinh(\alpha y)\Big)
\end{aligned}$$

Gebiet II ($y \in [0;b]$) mit $\kappa \neq 0$, $\mu = \mu_0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2}\underline{A}_{z2}(y) &= \underbrace{\mathrm{j}\omega\mu_0\kappa}_{=:\alpha^2}\underline{A}_{z2}(y) = \alpha^2\underline{A}_{z2}(y)\\
\underline{A}_{z2}(y) &= C_3\sinh(\alpha y) + C_4\cosh(\alpha y)\\
\underline{H}_{x2}(y) &= \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial y}\underline{A}_{z2}(y)\\
&= \frac{\alpha}{\mu_0}\Big(C_3\cosh(\alpha y) + C_4\sinh(\alpha y)\Big)
\end{aligned}$$

Im leiterfreien Nutbereich mit $y > b$ dagegen nimmt die Diffusionsgleichung aufgrund der fehlenden Leitfähigkeit $\kappa = 0$ eine einfachere Gestalt an und liefert bereits nach einmaliger Integration eine Lösung für die gesuchte magnetische Feldstärke

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2}\underline{A}_{z3}(y) &= 0 \qquad\qquad \Big|\int \mathrm{d}y\\
\frac{\partial}{\partial y}\underline{A}_{z3}(y) &= C_5 = \mu_0\underline{H}_{x3}(y)
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der unbekannten Konstanten $C_i \in \mathbb{C}\ \forall i$ betrachtet man nun das geschlossene Wegintegral der Magnetfeldstärke $\vec{\underline{H}}$ entlang der Randkurve eines Leiterquerschnitts, wobei allein Integrationswege in x-Richtung einen Beitrag liefern, da auch das Magnetfeld nur eine x-Komponente aufweist. Darüber hinaus muss das Feld am Nutgrund bei $y = -b$ infolge des ideal magnetisch leitfähigen Mediums verschwinden. Im Falle des stromführenden Leiters ergibt sich aus dem Umlaufintegral der umfasste Strom I_0 und es gilt

$$\begin{aligned}
\underline{I} = \oint_{\partial A}\vec{\underline{H}}_1\mathrm{d}\vec{r} &= \int_{-a}^{a}\underbrace{\underline{H}_{x1}(-b)}_{=0}\mathrm{d}x + \int_{-b}^{0}\underbrace{\underline{H}_{y1}(a)}_{=0}\mathrm{d}y + \int_{a}^{-a}\underline{H}_{x1}(0)\mathrm{d}x + \int_{0}^{-b}\underbrace{\underline{H}_{y1}(-a)}_{=0}\mathrm{d}y\\
&= -2a\underline{H}_{x1}(0) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{H}_{x1}(0) = -\frac{\underline{I}}{2a}
\end{aligned}$$

Für den unbestromten Leiter hingegen ist die bei einem Umlauf umschlossene Stromdichte Null und für die magnetische Feldstärke folgt als Bedingung

$$\begin{aligned} 0 = \oint\limits_{\partial A} \underline{\vec{H}}_2 \mathrm{d}\vec{r} &= \int\limits_{-a}^{a} \underline{H}_{x2}(0)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{b} \underbrace{\underline{H}_{y2}(a)}_{=0}\,\mathrm{d}y + \int\limits_{a}^{-a} \underline{H}_{x2}(b)\mathrm{d}x + \int\limits_{b}^{0} \underbrace{\underline{H}_{y2}(-a)}_{=0}\,\mathrm{d}y \\ &= 2a\underline{H}_{x2}(0) - 2a\underline{H}_{x2}(b) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{H}_{x2}(b) = \underline{H}_{x2}(0) = \underline{H}_{x1}(0) \end{aligned}$$

Gleichermaßen erhält man im leiterfreien Nutbereich mit $y' > b$

$$\begin{aligned} 0 = \oint\limits_{\partial A} \underline{\vec{H}}_3 \mathrm{d}\vec{r} &= \int\limits_{-a}^{a} \underline{H}_{x3}(b)\mathrm{d}x + \int\limits_{b}^{y'} \underbrace{\underline{H}_{y3}(a)}_{=0}\,\mathrm{d}y + \int\limits_{a}^{-a} \underline{H}_{x3}(y')\mathrm{d}x + \int\limits_{y'}^{b} \underbrace{\underline{H}_{y3}(-a)}_{=0}\,\mathrm{d}y \\ &= 2a\underline{H}_{x3}(b) - 2a\underline{H}_{x3}(y') \qquad \Rightarrow \qquad \underline{H}_{x3}(y') = \underline{H}_{x3}(b) = \underline{H}_{x1}(0) \end{aligned}$$

Damit berechnen sich die Konstanten C_1 und C_2 im Gebiet I zu

$$\begin{aligned} \underline{H}_{x1}(0) &= \frac{\alpha}{\mu_0}\Big(C_1 \underbrace{\cosh(0)}_{=1} + C_2 \underbrace{\sinh(0)}_{=0}\Big) \stackrel{!}{=} -\frac{\underline{I}}{2a} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{C_1 = -\frac{\mu_0 \underline{I}}{2a\alpha}} \\ \underline{H}_{x1}(-b) &= \frac{\alpha}{\mu_0}\left(-\frac{\mu_0 \underline{I}}{2a\alpha}\cosh(-\alpha b) + C_2 \sinh(-\alpha b)\right) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{C_2 = -\frac{\mu_0 \underline{I}}{2a\alpha}\frac{\cosh(\alpha b)}{\sinh(\alpha b)}} \end{aligned}$$

im Gebiet II gilt für C_3 und C_4 entsprechend

$$\begin{aligned} \underline{H}_{x2}(0) &= \frac{\alpha}{\mu_0}\Big(C_3 \underbrace{\cosh(0)}_{=1} + C_4 \underbrace{\sinh(0)}_{=0}\Big) \stackrel{!}{=} -\frac{\underline{I}}{2a} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{C_3 = -\frac{\mu_0 \underline{I}}{2a\alpha}} \\ \underline{H}_{x2}(b) &= \frac{\alpha}{\mu_0}\left(-\frac{\mu_0 \underline{I}}{2a\alpha}\cosh(\alpha b) + C_4 \sinh(\alpha b)\right) \stackrel{!}{=} -\frac{\underline{I}}{2a} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{C_4 = -\frac{\mu_0 \underline{I}}{2a\alpha}\frac{1-\cosh(\alpha b)}{\sinh(\alpha b)}} \end{aligned}$$

und für das Gebiet III bestimmt man C_5 als

$$\underline{H}_{x3}(y') = \underline{H}_{x3}(b) = \frac{C_5}{\mu_0} \stackrel{!}{=} -\frac{\underline{I}}{2a} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{C_5 = -\frac{\mu_0 \underline{I}}{2a}}$$

Zusammenfassend lautet das Ergebnis

$$\underline{H}_x(y) = \begin{cases} -\frac{\underline{I}}{2a}\left[\cosh(\alpha y) + \cosh(\alpha b)\frac{\sinh(\alpha y)}{\sinh(\alpha b)}\right] & : \quad -b \le y < 0 \\ -\frac{\underline{I}}{2a}\left[\cosh(\alpha y) + \big(1-\cosh(\alpha b)\big)\frac{\sinh(\alpha y)}{\sinh(\alpha b)}\right] & : \quad 0 \le y < b \\ -\frac{\underline{I}}{2a} & : \quad y \ge b \end{cases}$$

13.4 Langer flacher Stahlstrang im magnetischen Wechselfeld

Da in der Aufgabenstellung die Feldstärke des äußeren Magnetfeldes mit $\underline{\vec{H}} = \underline{H}_y \vec{e}_y$ vorgegeben ist, führt der Lösungsweg über die Diffusionsgleichung der magnetischen Feldstärke

$$\triangle \underline{\vec{H}}(\vec{r}) = \mathrm{j}\omega\mu\kappa \underline{\vec{H}}(\vec{r})$$

Aus der Geometrie der Anordnung lassen sich nun einige Vereinfachungen ableiten. So folgt wegen der sehr großen Längenausdehnung $l \gg h$ und der gegenüber der Höhe h vergleichsweise geringen Breite $b \ll h$ des Stahlstrangs einerseits, dass Randeffekte vernachlässigt werden können, und andererseits, dass nur die Abhängigkeit in x-Richtung berücksichtigt zu werden braucht und damit alle partiellen Ableitungen nach y und z entfallen. Demgemäß schreibt sich die Diffusionsgleichung als

$$\triangle \underline{\vec{H}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}_{=0} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{H}_y \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\frac{\partial^2 \underline{H}_y}{\partial x^2} \vec{e}_y = \mathrm{j}\omega\mu\kappa \underline{H}_y \vec{e}_y}$$

Die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung im Leitergebiet $x \in [-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}]$ mit der Leitfähigkeit $\kappa \neq 0$ lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{H}_y - \underbrace{\mathrm{j}\omega\mu\kappa}_{=:\alpha^2} \underline{H}_y &= 0 \\ \underline{H}_y(x) &= C_1 \sinh(\alpha x) + C_2 \cosh(\alpha x) \end{aligned}$$

Aufgrund der gegebenen Randbedingung des Magnetfeldes $\underline{H}_y(-\frac{b}{2}) = \underline{H}_y(\frac{b}{2}) = H_0$ muss die Funktion $\underline{H}_y(x)$ insgesamt gerade sein, womit die Konstante $\underline{C_1 = 0}$ wird und sich C_2 bestimmen lässt zu

$$\underline{H}_y \left(\frac{b}{2} \right) = C_2 \cosh \left(\alpha \frac{b}{2} \right) = H_0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{C_2 = H_0 \frac{1}{\cosh\left(\alpha \frac{b}{2}\right)}}$$

Somit erhält man als Beziehung der magnetischen Flussdichte

$$\underline{\underline{B}_y(x) = \mu \underline{H}_y(x) = \mu H_0 \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh\left(\alpha \frac{b}{2}\right)}}$$

Für den Zusammenhang zwischen Magnetfeld und Stromdichte gilt nun

$$\mathrm{rot}\, \underline{\vec{H}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \underline{H}_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \underline{H}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{J}_x \\ \underline{J}_y \\ \underline{J}_z \end{pmatrix} = \underline{\vec{J}}$$

sodass sich die Stromdichte im Stranginneren aus der Ableitung des zuvor bestimmten Magnetfeldes berechnen lässt

$$\underline{J}_z(x) = \frac{\partial}{\partial x} \underline{H}_y(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[H_0 \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh\left(\alpha \frac{b}{2}\right)} \right] = \underline{\alpha H_0 \frac{\sinh(\alpha x)}{\cosh\left(\alpha \frac{b}{2}\right)}}$$

13.5 Langer Leiter im (parallelen) magnetischen Wechselfeld

Wie bereits in Aufgabe 13.4 bestimmt man die Wirbelstromdichte im Inneren des zylindrischen Leiters durch Lösen der Diffusionsgleichung für das magnetische Feld, welche sich in Zylinderkoordinaten wie folgt formuliert

$$\triangle \underline{\vec{H}} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial \underline{\vec{H}}}{\partial \varrho}\right) + \varrho^2 \frac{\partial^2 \underline{\vec{H}}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{\vec{H}}}{\partial z^2} = \mathrm{j}\omega\mu\kappa \underline{\vec{H}}$$

Aufgrund der sehr großen lateralen Ausdehnung des Leiters in z-Richtung sowie infolge der Zylindersymmetrie besteht keine Abhängigkeit von z oder vom Winkel φ, weshalb die entsprechenden partiellen Ableitungen Null ergeben. Da weiterhin das äußere magnetische Feld parallel zur Leiterachse verläuft, also $\underline{\vec{H}} = \underline{H}_z(\varrho)\vec{e}_z$ gilt, vereinfacht sich die Diffusionsgleichung zu

$$\triangle \underline{\vec{H}} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial \underline{H}_z(\varrho)}{\partial \varrho}\right)\vec{e}_z = \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \underline{H}_z(\varrho)}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \underline{H}_z(\varrho)}{\partial \varrho^2}\right)\vec{e}_z = \underbrace{\mathrm{j}\omega\mu\kappa}_{=:\alpha^2}\underline{H}_z(\varrho)\vec{e}_z = \alpha^2 \underline{H}_z(\varrho)\vec{e}_z$$

Durch Umformung ergibt sich hieraus eine sogenannte BESSELsche Differentialgleichung[1], deren allgemeine Lösung im vorliegenden Fall die modifizierten BESSEL-Funktionen nullter Ordnung I_0 und K_0 sowie die Integrationskonstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ enthält

$$\begin{aligned} \varrho^2 \frac{\partial^2 \underline{H}_z}{\partial \varrho^2} + \varrho \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varrho} - \alpha^2 \varrho^2 \underline{H}_z &= 0 \\ \Rightarrow \qquad \underline{H}_z(\varrho) &= C_1 I_0(\alpha\varrho) + C_2 K_0(\alpha\varrho) \end{aligned}$$

Da die magnetische Feldstärke auf der Leiterachse bei $\varrho = 0$ nur einen endlichen Wert annehmen kann, folgt wegen

$$\underline{H}_z(0) = C_1 \underbrace{I_0(0)}_{=1} + C_2 \underbrace{K_0(0)}_{\to\infty} \neq \infty$$

dass die Konstante $\underline{C_2 = 0}$ sein muss. Die verbleibende Konstante C_1 bestimmt man nun aus der gegebenen Feldstärke auf der Leitermantelfläche

$$\underline{H}_z(a) = C_1 I_0(\alpha a) \stackrel{!}{=} \underline{H}_0 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \frac{\underline{H}_0}{I_0(\alpha a)}$$

womit das Ergebnis für die Magnetfeldstärke im Leiterinneren lautet

$$\underline{\underline{H}_z(\varrho) = \underline{H}_0 \frac{I_0(\alpha\varrho)}{I_0(\alpha a)}} \qquad (\varrho \leq a)$$

Die Stromdichte berechnet sich schließlich aus der Feldstärke durch Bilden der Rotation

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\, \underline{\vec{H}} &= \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\varrho + \left(\frac{\partial \underline{H}_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varrho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho \underline{H}_\varphi) - \frac{\partial \underline{H}_\varrho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z \\ &= -\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varrho}\vec{e}_\varphi = \underline{J}_\varphi \vec{e}_\varphi = \underline{\vec{J}} \\ \Rightarrow \qquad \underline{J}_\varphi(\varrho) &= -\frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\underline{H}_0 \frac{I_0(\alpha\varrho)}{I_0(\alpha a)}\right] = -\frac{\underline{H}_0}{I_0(\alpha a)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \varrho} I_0(\alpha\varrho)}_{=\alpha I_1(\alpha\varrho)} = \underline{-\alpha \underline{H}_0 \frac{I_1(\alpha\varrho)}{I_0(\alpha a)}} \end{aligned}$$

[1] Die allgemeine (modifizierte) BESSELsche Differentialgleichung besitzt die Form

$$x^2 y''(x) + x y'(x) - (x^2 + n^2) y(x) = 0$$

mit der beliebig wählbaren reellen oder komplexen Zahl n, wobei im vorliegenden Fall $n = 0$ ist. Durch die Substitution $t := \alpha\varrho$ mit $\mathrm{d}t = \alpha \mathrm{d}\varrho$ lässt sich die ursprüngliche Gleichung nun in diese Gestalt überführen:

$$\varrho^2 \frac{\partial^2 H_z(\varrho)}{\partial \varrho^2} + \varrho \frac{\partial H_z(\varrho)}{\partial \varrho} - (\alpha\varrho)^2 H_z(\varrho) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t^2 \frac{\partial^2 H_z(t)}{\partial t^2} + t \frac{\partial H_z(t)}{\partial t} - t^2 H_z(t) = 0$$

13.6 Langer Leiter mit niederfrequentem Wechselstrom

Als Ansatz zur Berechnung der gesuchten Feldgrößen bietet sich die Diffusionsgleichung des magnetischen Vektorpotentials an, da, wie auch in den Aufgaben 13.1, 13.2 und 13.3, der Strom durch den Leiter vorgegeben ist. In Zylinderkoordinaten lautet diese

$$\triangle \underline{\vec{A}} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial \underline{\vec{A}}}{\partial \varrho}\right) + \varrho^2 \frac{\partial^2 \underline{\vec{A}}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{\vec{A}}}{\partial z^2} = \mathrm{j}\omega\mu\kappa \underline{\vec{A}}$$

Aufgrund der Zylindersymmetrie und der unendlichen Ausdehnung des Leiters in z-Richtung vereinfacht sich das Problem, da lediglich eine radiale Abhängigkeit von ϱ vorliegt und die partiellen Ableitungen nach φ und z demnach Null ergeben. Mit der gegebenen Stromrichtung ist zugleich die Richtung des Vektorpotentials bekannt, sodass die Diffusionsgleichung mit $\underline{\vec{A}} = \underline{A}_z(\varrho)\vec{e}_z$ die Form

$$\triangle \underline{\vec{A}} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial \underline{A}_z(\varrho)}{\partial \varrho}\right)\vec{e}_z = \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \underline{A}_z(\varrho)}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \underline{A}_z(\varrho)}{\partial \varrho^2}\right)\vec{e}_z = \underbrace{\mathrm{j}\omega\mu\kappa}_{=:\alpha^2}\underline{A}_z(\varrho)\vec{e}_z = \alpha^2 \underline{A}_z(\varrho)\vec{e}_z$$

annimmt. Diese Gleichung stellt wiederum eine BESSELsche Differentialgleichung dar, die von der aus Aufgabe 13.5 bekannten allgemeinen Lösung mit den modifizierten BESSEL-Funktionen nullter Ordnung I_0 und K_0 erfüllt wird.

$$\begin{aligned} \varrho^2 \frac{\partial^2 \underline{A}_z}{\partial \varrho^2} + \varrho \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial \varrho} - \alpha^2 \varrho^2 \underline{A}_z &= 0 \\ \Rightarrow \qquad \underline{A}_z(\varrho) &= C_1 I_0(\alpha\varrho) + C_2 K_0(\alpha\varrho) \end{aligned}$$

Um die noch unbekannten Integrationskonstanten $C_i \in \mathbb{C}$ bestimmen zu können, muss hieraus zunächst die magnetische Feldstärke über die Rotation des Vektorpotentials berechnet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \underline{\vec{B}} = \operatorname{rot} \underline{\vec{A}} &= \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \underline{A}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \underline{A}_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\varrho + \left(\frac{\partial \underline{A}_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial \varrho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho \underline{A}_\varphi) - \frac{\partial \underline{A}_\varrho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z \\ &= -\frac{\partial \underline{A}_z}{\partial \varrho}\vec{e}_\varphi = \mu \underline{H}_\varphi \vec{e}_\varphi \\ \Rightarrow \qquad \underline{H}_\varphi(\varrho) &= -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \underline{A}_z}{\partial \varrho} = -\frac{1}{\mu}\left[C_1 \underbrace{\frac{\partial I_0(\alpha\varrho)}{\partial \varrho}}_{=\alpha I_1(\alpha\varrho)} + C_2 \underbrace{\frac{\partial K_0(\alpha\varrho)}{\partial \varrho}}_{=-\alpha K_1(\alpha\varrho)}\right] = -\frac{\alpha}{\mu}\Big[C_1 I_1(\alpha\varrho) - C_2 K_1(\alpha\varrho)\Big] \end{aligned}$$

Aus der Überlegung, dass die Feldstärke auf der Leiterachse bei $\varrho = 0$ nicht unendlich groß werden kann, folgt wegen $K_1(0) \to \infty$ für die Konstante $\underline{C_2 = 0}$. Eine weitere Bedingung erhält man aus dem Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke entlang der Berandung des kreisförmigen Leiterquerschnittes, welches den hindurchfließenden Wechselstrom $\underline{I}$ liefert. Auf der Leitermantelfläche gilt demnach

$$\oint_{\partial A} \underline{\vec{H}} \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{2\pi} \underline{H}_\varphi(\varrho)\vec{e}_\varphi \varrho \mathrm{d}\varphi \vec{e}_\varphi = 2\pi\varrho \underline{H}_\varphi(\varrho) \stackrel{!}{=} \underline{I} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{H}_\varphi(a) = \frac{\underline{I}}{2\pi a}$$

womit die Konstante C_1 schließlich zu

$$\underline{H}_\varphi(a) = -\frac{\alpha}{\mu} C_1 I_1(\alpha a) \stackrel{!}{=} \frac{\underline{I}}{2\pi a} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{C_1 = -\frac{\mu \underline{I}}{2\pi\alpha a}\frac{1}{I_1(\alpha a)}}$$

und als Ergebnis für Vektorpotential, Magnetfeldstärke und Stromdichte im Leiterinneren insgesamt

$$\begin{aligned} \underline{A}_z(\varrho) &= -\frac{\mu \underline{I}}{2\pi a \alpha}\frac{I_0(\alpha\varrho)}{I_1(\alpha a)} \qquad (\varrho \le a) \\ \underline{H}_\varphi(\varrho) &= \frac{\underline{I}}{2\pi a}\frac{I_1(\alpha\varrho)}{I_1(\alpha a)} \\ \underline{J}_z(\varrho) = -\mathrm{j}\omega\kappa \underline{A}_z(\varrho) &= \frac{\alpha \underline{I}}{2\pi a}\frac{I_0(\alpha\varrho)}{I_1(\alpha a)} \end{aligned}$$

folgt.

14 Ebene Wellen

14.1 Beschreibung ebener Wellen

Um zu entscheiden, ob die gegebenen Gleichungen gültige Beschreibungen ebener elektromagnetischer Wellen darstellen, sind diese auf Erfüllung der Wellengleichung zu prüfen. Diese lässt sich, wie bereits in Aufgabe 2.8 gezeigt, durch Bilden der Rotation aus dem Induktionsgesetz bzw. dem Durchflutungsgesetz der MAXWELL-Gleichungen herleiten. In komplexer Darstellung gilt dabei für die elektrische Feldstärke in einem ladungsfreien Raumgebiet ($\varrho = 0$)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\underline{\vec{E}}\right) = \operatorname{grad}\underbrace{\left(\operatorname{div}\underline{\vec{E}}\right)}_{=0} - \triangle\,\underline{\vec{E}} &= \operatorname{rot}\left[-\mathrm{j}\omega\mu\underline{\vec{H}}\right] = \underbrace{-\mathrm{j}\omega\mu(\kappa+\mathrm{j}\omega\varepsilon)}_{=:k^2}\underline{\vec{E}} \\ \triangle\,\underline{\vec{E}} + k^2\underline{\vec{E}} &= 0 \end{aligned}$$

und analog für die magnetische Feldstärke

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\underline{\vec{H}}\right) = \operatorname{grad}\underbrace{\left(\operatorname{div}\underline{\vec{H}}\right)}_{=0} - \triangle\,\underline{\vec{H}} &= \operatorname{rot}\left[(\kappa+\mathrm{j}\omega\varepsilon)\underline{\vec{E}}\right] = \underbrace{-(\kappa+\mathrm{j}\omega\varepsilon)\mathrm{j}\omega\mu}_{=:k^2}\underline{\vec{H}} \\ \triangle\,\underline{\vec{H}} + k^2\underline{\vec{H}} &= 0 \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung wird von jeder Funktion der Form $\Psi(\vec{r},t) = f(\omega t \pm \vec{k}\vec{r})$ mit der Phase $\varphi = \omega t \pm \vec{k}\vec{r}$ gelöst, insbesondere also auch von ebenen Wellen, deren elektrisches bzw. magnetisches Feld die Gestalt

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\vec{k}\vec{r})} \qquad\qquad \underline{\vec{B}}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\vec{k}\vec{r})}$$

oder

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) \qquad\qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)$$

aufweist. Hierin bezeichnet $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x & k_y & k_z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ den sogenannten Wellen- oder Ausbreitungsvektor und $k = |\vec{k}|$ die Wellenzahl. Bei konstanter Phase φ und damit konstanter Feldstärke ist für einen festen Zeitpunkt t offenbar auch $\vec{k}\vec{r} = \text{const.}$, was die Koordinatenform einer Ebene im Raum mit dem Normalenvektor $\vec{k} = k\vec{n}$ darstellt. Als Geschwindigkeit, mit der sich diese ebenen Flächen gleicher Phase in Normalenrichtung ausbreiten, erhält man durch zeitliche Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) = \omega - k\vec{n}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_{\mathrm{P}} = \vec{n}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k}$$

Erfolgt die Ausbreitung in einem idealen Isolatormedium mit $\kappa = 0$, so gilt $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$. Ist nun $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ die Vakuumlichtgeschwindigkeit und definiert man $n = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}}$ als den Brechungsindex des Mediums, so folgt für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Medium

$$\underline{v_{\mathrm{P}} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}}$$

Der Abstand bzw. die Wellenlänge λ zweier aufeinander folgender Wellenfronten gleicher Phase berechnet sich hingegen gemäß

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \omega(t_1 - t_0) - \vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = \omega\Delta t - k\vec{n}\Delta\vec{r} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\lambda = \vec{n}\Delta\vec{r} = \frac{\omega}{k}\Delta t = v_{\mathrm{P}}T = \frac{v_{\mathrm{P}}}{f}}$$

mit der Periodendauer T und der Frequenz $f = \frac{1}{T}$ der Welle.

- Für die erste Gleichung der elektrischen Feldstärke

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e}_z$$

liest man die Feldrichtung aus dem Einheitsvektor der Amplitude und die Ausbreitungsrichtung aus der Phase, also aus dem Argument des Kosinus ab. Mit $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ lautet der Wellenvektor demnach $\vec{k} = k\vec{e}_z$ - er zeigt damit in die gleiche Richtung wie der elektrische Feldvektor, womit die erste MAXWELLsche Gleichung nicht erfüllt wird. Folglich ist diese Darstellung keine gültige Beschreibung einer ebenen Welle. Im Falle ebener Wellen im ladungsfreien Raum müsste hingegen gelten

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r},t) = \operatorname{div}\left[\vec{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\right] = -\mathrm{j}\vec{k}\vec{E}(\vec{r},t) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{k} \perp \vec{E}(\vec{r},t)$$

Gleichermaßen gilt zwischen magnetischem Feldstärkevektor und Wellenvektor die Beziehung

$$\operatorname{div}\vec{B}(\vec{r},t) = \operatorname{div}\left[\vec{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\right] = -\mathrm{j}\vec{k}\vec{B}(\vec{r},t) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{k} \perp \vec{B}(\vec{r},t)$$

d.h. bei ebenen Wellen handelt es sich stets um Transversalwellen, die sich senkrecht zur Schwingungsrichtung ausbreiten.

- Die zweite Gleichung

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\vec{e}_x$$

kann zunächst mithilfe der trigonometrischen Beziehung $\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi$ zu

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \frac{E_0}{2}\sin\left[2(\omega t - kz)\right]\vec{e}_x = \frac{E_0}{2}\cos\left(\tilde{\omega}t - \tilde{k}z - \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_x$$

umgeformt werden, wonach offensichtlich wird, dass diese die Wellengleichung erfüllt.

- Bei der dritten Gleichung

$$\vec{E}_3(\vec{r},t) = E_0 \cos\left[(\omega t - kz)(\omega t + kz)\right]\vec{e}_x$$

ist sofort ersichtlich, dass es sich hierbei nicht um eine ebene Welle handeln kann, da die Phase nach Ausmultiplizieren eine quadratische Zeit- und Ortsabhängigkeit aufweist und somit die Wellengleichung nicht erfüllt.

- Die vierte Gleichung

$$\vec{E}_4(\vec{r},t) = E_{0x}\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x + E_{0y}\sin(\omega t - kz)\vec{e}_y$$

beschreibt die Addition, d.h. die Superposition zweier ebener Wellen, deren Schwingung in x- bzw. y-Richtung erfolgt und welche sich jeweils in z-Richtung ausbreiten. Da beide Wellenkomponenten für sich betrachtet die Wellengleichung erfüllen, gilt dies somit auch für deren Summe.

14.2 Polarisationsarten ebener Wellen

Die gegebene Gleichung einer ebenen Welle, die sich in z-Richtung fortbewegt, kann mit der Definition der Phase $\varphi := \omega t - kz + \varphi_x$ und der relativen Phasenverschiebung $\delta := \varphi_y - \varphi_x$ zunächst etwas vereinfacht geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= E_{0x}\cos(\omega t - kz + \varphi_x)\vec{e}_x + E_{0y}\cos(\omega t - kz + \varphi_y)\vec{e}_y \\ &= E_{0x}\cos\varphi\vec{e}_x + E_{0y}\cos(\varphi+\delta)\vec{e}_y\end{aligned}$$

Je nach Wahl der Amplituden E_{0x} und E_{0y} sowie der Phasenverschiebung δ weist die resultierende elektrische Welle dabei eine unterschiedliche Polarisation auf.

Lineare Polarisation

Für den Fall beliebiger Amplituden E_{0x} und E_{0y} und einer Phasenverschiebung von $\delta = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$ folgt für den Kosinusterm der y-Komponente

$$\cos(\varphi + n\pi) = \cos\varphi \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \sin\varphi \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} = (-1)^n\cos\varphi = \pm\cos\varphi$$

und die Gleichung der Welle erhält die Form

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \Big[E_{0x}\vec{e}_x \pm E_{0y}\vec{e}_y\Big]\cos\varphi = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ \pm E_{0y}\end{pmatrix}\cos\varphi = \vec{E}_0\cos\varphi$$

Damit schwingen x- und y-Komponente in Phase und können zu einem resultierenden Amplitudenvektor $\vec{E}_0$ zusammengefasst werden, dessen Betrag $|\vec{E}_0| = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}$ sowohl zeit- als auch ortsunabhängig ist. Der Feldvektor besitzt also eine feste Schwingungsrichtung und beschreibt bei Projektion auf die xy-Ebene eine Ursprungsgerade, wie man sich leicht durch Ineinander-Einsetzen der Komponenten und Eliminieren des Kosinustermes deutlich macht:

$$E_y = \pm E_{0y}\cos\varphi = \pm\frac{E_{0y}}{E_{0x}}E_x$$

Derartige Wellen werden aufgrund dieser Eigenschaft als *linear polarisiert* bezeichnet. Ihre Polarisationsebene ist dabei um den Winkel $\alpha = \arctan\left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}}\right)$ gegenüber der x-Achse geneigt.

Zirkulare Polarisation

Bei gleichen Amplituden $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ und einer Phasenverschiebung $\delta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$\cos\left(\varphi + (2n{+}1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi \underbrace{\cos\left((2n{+}1)\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \sin\varphi \underbrace{\sin\left((2n{+}1)\frac{\pi}{2}\right)}_{=(-1)^n} = (-1)^{n+1}\sin\varphi = \mp\sin\varphi$$

womit sich für die Beschreibung der Welle

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0\Big[\cos\varphi\vec{e}_x \mp \sin\varphi\vec{e}_y\Big] = E_0\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \mp\sin\varphi\end{pmatrix}$$

ergibt. Dies ist für einen festen Ort z die Parameterdarstellung eines Kreises mit Radius E_0 in der xy-Ebene, die sich durch Quadrieren beider Komponenten und anschließender Addition schließlich noch in die Gestalt der allgemeinen Kreisgleichung bringen lässt

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = E_0^2$$

Mit fortschreitender Zeit wird dieser Kreis - in Ausbreitungsrichtung betrachtet - für gerade Werte von n (z.B. $\delta = \frac{\pi}{2}$) entgegen dem Uhrzeigersinn und für ungerade n (z.B. $\delta = -\frac{\pi}{2}$) im Uhrzeigersinn durchlaufen. Entsprechend nennt man solche Wellen *(links bzw. rechts)*[1] *zirkular polarisiert.*

[1] Je nach Betrachtungsweise (in Ausbreitungsrichtung oder mit Blick auf die Quelle) ist die Definition des Drehsinnes allerdings auch anders herum möglich.

Elliptische Polarisation

Ist wie zuvor die Phasenverschiebung $\delta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und sind nun jedoch die Amplituden verschieden voneinander, d.h. $E_{0x} \neq E_{0y}$, so folgt

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{0x}\cos\varphi\vec{e}_x \mp E_{0y}\sin\varphi\vec{e}_y = \begin{pmatrix} E_{0x}\cos\varphi \\ \mp E_{0y}\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

Durch Quadrieren der x- und y-Komponente gelangt man nach dem Umstellen und Addieren schließlich zur Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen E_{0x} und E_{0y} in der xy-Ebene.

$$\begin{aligned} E_x^2 = E_{0x}^2\cos^2\varphi \quad &\rightarrow \quad \left(\tfrac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 = \cos^2\varphi \\ E_y^2 = E_{0y}^2\sin^2\varphi \quad &\rightarrow \quad \left(\tfrac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = \sin^2\varphi \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 1$$

Analog zur Zirkularpolarisation heißt die Welle in diesem Fall *(links bzw. rechts) elliptisch polarisiert.*

Elliptische Polarisation mit gedrehten Hauptachsen

Sind sowohl Phasenverschiebung δ als auch die Amplituden E_{0x} und E_{0y} beliebig, erhält man aus der Gleichung der Welle mit $\cos(\varphi+\delta) = \cos\varphi\cos\delta - \sin\varphi\sin\delta$ durch Umformen der y-Komponente und Einsetzen der x-Komponente:

$$\begin{aligned} \sin\varphi\sin\delta &= \cos\varphi\cos\delta - \frac{E_y}{E_{0y}} \\ \sin^2\varphi\sin^2\delta = \left(1-\cos^2\varphi\right)\sin^2\delta &= \cos^2\varphi\cos^2\delta - 2\frac{E_y}{E_{0y}}\cos\varphi\cos\delta + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 \\ \left[1-\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right]\sin^2\delta &= \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\cos^2\delta - 2\frac{E_y}{E_{0y}}\frac{E_x}{E_{0x}}\cos\delta + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 \\ \sin^2\delta &= \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\left(\sin^2\delta+\cos^2\delta\right) - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos\delta + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 \\ 1 &= \left(\frac{E_x}{E_{0x}\sin\delta}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}\sin\delta}\frac{E_y}{E_{0y}\sin\delta}\cos\delta + \left(\frac{E_y}{E_{0y}\sin\delta}\right)^2 \end{aligned}$$

Mittels einer Hauptachsentransformation kann diese Gleichung nun wieder in die Gestalt des vorhergehenden Falles überführt werden. Es ergibt sich somit ebenfalls eine *elliptisch polarisierte Welle*, jedoch mit gegenüber dem xy-Koordinatensystem gedrehten Hauptachsen.

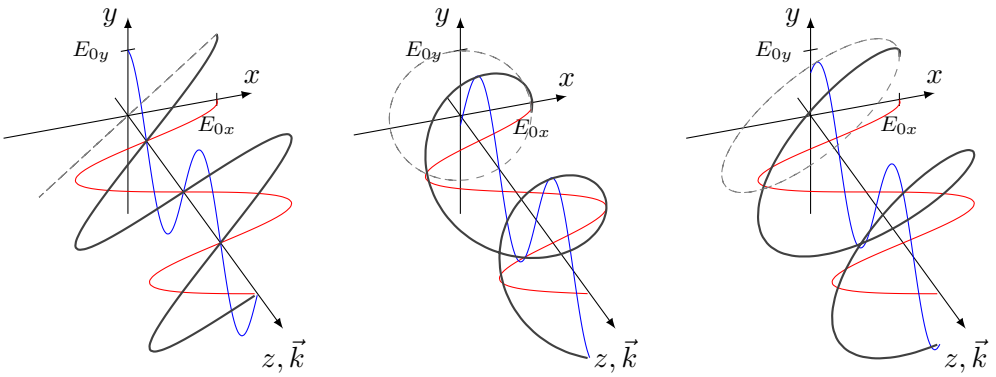


Abbildung 14.1: Darstellung der sich in positive z-Richtung ausbreitenden Welle für die Fälle linearer Polarisation (links), links zirkularer Polarisation (Mitte) und links elliptischer Polarisation mit gedrehten Hauptachsen (rechts).

14.3 Elektrische Feldstärke und magnetische Flussdichte einer ebenen Welle

Soll aus der elektrischen Feldstärke der ebenen Welle, gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r},t) = 3E_0\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e}_x - 2E_0\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e}_y$$

die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ berechnet werden, so kann dies prinzipiell auf zwei Wegen geschehen. Zum einen lässt sich dazu das Induktionsgesetz der MAXWELL-Gleichungen nutzen, welches eine Beziehung zwischen der Rotation des $\vec{E}$-Feldes und der zeitlichen Ableitung des $\vec{B}$-Feldes beschreibt:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e}_x - \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e}_y &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ 2kE_0\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e}_x + 3kE_0\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e}_y &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

Durch zeitliche Integration folgt hieraus dann

$$\underline{\vec{B} = \frac{k}{\omega}\Big(2E_0\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e}_x - 3E_0\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e}_y\Big)}$$

Andererseits leitet sich mit der Exponentialdarstellung der komplexen elektrischen Feldstärke

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

aus dem Induktionsgesetz unter Nutzung der Produktregel für die Anwendung der Rotation[1] eine Beziehung zwischen elektrischem und magnetischem Feldstärkevektor sowie dem Wellenvektor $\vec{k}$ wie folgt ab

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\underline{\vec{E}} = \operatorname{rot}\left(\vec{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\right) = \underbrace{\operatorname{rot}\vec{E}_0}_{=0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \vec{k}\vec{r})} - \vec{E}_0 \times \operatorname{grad}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\right) &= -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -\mathrm{j}\omega\underline{\vec{B}} \\ \vec{E}_0 \times \begin{pmatrix} -\mathrm{j}k_x\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\ldots)} \\ -\mathrm{j}k_y\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\ldots)} \\ -\mathrm{j}k_z\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\ldots)} \end{pmatrix} = -\mathrm{j}\vec{E}_0 \times \vec{k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = \mathrm{j}\vec{k} \times \vec{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \vec{k}\vec{r})} &= \mathrm{j}\omega\underline{\vec{B}} \\ \Rightarrow \qquad \underline{\vec{B}} &= \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \times \underline{\vec{E}}\right)\end{aligned}$$

Mithilfe dieser Relation und der Vereinfachung $\phi := \omega t - kz + \varphi$ berechnet man für die gegebene Gleichung der ebenen Welle nun

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \times \vec{E}\right) = \frac{1}{\omega}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & k \\ 3E_0\cos\phi & -2E_0\sin\phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \underline{\frac{k}{\omega}\Big(2E_0\sin\phi\vec{e}_x + 3E_0\cos\phi\vec{e}_y\Big)}\end{aligned}$$

Wie aus der Betrachtung des elektrischen oder des magnetischen Feldes der Welle ersichtlich ist, sind die Amplituden der x- und y-Komponente verschieden voneinander und beträgt die relative Phasenverschiebung $\delta = \frac{\pi}{2}$, womit es sich nach Aufgabe 14.2 um eine elliptisch polarisierte Welle handelt.

[1]
$$\operatorname{rot}\left(\Phi\vec{F}\right) = \Phi\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}\Phi \times \vec{F} = \Phi\operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F} \times \operatorname{grad}\Phi$$

14.4 Ausbreitungsgeschwindigkeit und Wellenwiderstand einer ebenen Welle

Ausbreitungsgeschwindigkeit v und Wellenwiderstand Z_W einer ebenen Welle sind definiert als

$$\underline{v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\omega}{k}} \qquad\qquad \underline{Z_\mathrm{W} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\mu\omega}{k} = \mu v}$$

mit k als Wellenzahl bzw. Betrag des Wellenvektors $\vec{k} = k\vec{n}$. Die bereits in Aufgabe 14.3 hergeleitete Beziehung

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \times \vec{E}\right)$$

zur Berechnung der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ aus der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ lässt sich auf einfache Weise für den Fall umformen, dass die elektrische Feldstärke der Welle bei gegebener magnetischer Flussdichte bestimmt werden soll. Hierzu bildet man auf beiden Seiten der Gleichung das Kreuzprodukt mit dem Wellenvektor $\vec{k}$ und wendet anschließend den Entwicklungssatz zur Auflösung des doppelten Kreuzproduktes (*bac-cab-Regel*)[1] an:

$$\begin{aligned} \omega\vec{B} \times \vec{k} &= \left(\vec{k} \times \vec{E}\right) \times \vec{k} = -\vec{k} \times \left(\vec{k} \times \vec{E}\right) = -\Big[\vec{k}(\underbrace{\vec{k}\vec{E}}_{=0}) - \vec{E}(\vec{k}\vec{k})\Big] = \vec{E}k^2 \\ \Rightarrow \qquad \vec{E} &= \underline{\frac{\omega}{k^2}\left(\vec{B} \times \vec{k}\right)} \end{aligned}$$

Werden beide Relationen noch mithilfe von v und Z_W ausgedrückt, so folgt

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega}\left(\vec{n} \times \vec{E}\right) = \frac{1}{v}\left(\vec{n} \times \vec{E}\right) \qquad \vec{E} = \frac{\omega}{k}\left(\vec{B} \times \vec{n}\right) = v\left(\vec{B} \times \vec{n}\right)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_\mathrm{W}}\left(\vec{n} \times \vec{E}\right) \qquad \vec{E} = Z_\mathrm{W}\left(\vec{H} \times \vec{n}\right)$$

[1]
$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

14.5 Zwei zirkular polarisierte Wellen

Für die gegebenen zirkular polarisierten TEM-Wellen

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = E_0\left[\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x + \sin(\omega t - kz)\vec{e}_y\right] \qquad \vec{B}_2(\vec{r},t) = B_0\left[\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x + \sin(\omega t - kz)\vec{e}_y\right]$$

welche sich im nichtleitenden und ungeladenen Medium in z-Richtung ausbreiten, bestimmt sich das zugehörige magnetische bzw. elektrische Feld entweder aus dem Induktionsgesetz der MAXWELLschen Gleichungen in der Form $\operatorname{rot}\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\vec{B}}$ oder mithilfe der aus Aufgabe 14.4 bekannten Beziehungen. Nach letzterer Variante folgt mit $\vec{k} = k\vec{e}_z$ und $\phi := \omega t - kz$

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \frac{1}{\omega}\left(\vec{k}\times\vec{E}_1\right) = \frac{1}{\omega}\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 0 & 0 & k\\ E_0\cos\phi & E_0\sin\phi & 0\end{vmatrix}\\ &= -\frac{k}{\omega}\left(E_0\sin\phi\vec{e}_x - E_0\cos\phi\vec{e}_y\right) = \underline{-\frac{E_0}{v}\left(\sin\phi\vec{e}_x - \cos\phi\vec{e}_y\right)}\end{aligned}$$

als magnetische Flussdichte der ersten Welle. Analog erhält man für die zweite Welle gemäß

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 &= \frac{\omega}{k^2}\left(\vec{B}_2\times\vec{k}\right) = \frac{\omega}{k^2}\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ B_0\cos\phi & B_0\sin\phi & 0\\ 0 & 0 & k\end{vmatrix}\\ &= \frac{\omega}{k}\left(B_0\sin\phi\vec{e}_x - B_0\cos\phi\vec{e}_y\right) = \underline{vB_0\left(\sin\phi\vec{e}_x - \cos\phi\vec{e}_y\right)}\end{aligned}$$

die elektrische Feldstärke. Die Berechnung des POYNTING-Vektors erfolgt über das Kreuzprodukt von elektrischer und magnetischer Feldstärke nach der Gleichung

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$$

sodass sich dieser für beide Wellen wie folgt darstellt

$$\begin{aligned}\vec{S}_1 &= \frac{1}{\mu}\left(\vec{E}_1\times\vec{B}_1\right) = \frac{E_0^2}{v\mu}\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\end{vmatrix} = \underline{\frac{E_0^2}{v\mu}\vec{e}_z = \frac{E_0^2}{Z_\mathrm{W}}\vec{e}_z}\\ \vec{S}_2 &= \frac{1}{\mu}\left(\vec{E}_2\times\vec{B}_2\right) = \frac{vB_0^2}{\mu}\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \sin\phi & -\cos\phi & 0\\ \cos\phi & \sin\phi & 0\end{vmatrix} = \underline{\frac{vB_0^2}{\mu}\vec{e}_z = \frac{Z_\mathrm{W}B_0^2}{\mu^2}\vec{e}_z}\end{aligned}$$

14.6 Ebene Wellen in komplexer Darstellung

Zur Bestimmung des zugehörigen magnetischen bzw. elektrischen Feldes der beiden durch

$$\underline{\vec{E}}_1(\vec{r}) = \frac{E_0}{5}\left(\vec{e}_x - 2\vec{e}_y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\vec{r}} \qquad \text{mit} \quad \vec{k} = k_z\vec{e}_z \qquad \text{und} \qquad \underline{\vec{B}}_2(\vec{r}) = B_0\left(4\vec{e}_x - 3\vec{e}_y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}$$

gegebenen ebenen Wellen, welche sich im nichtleitenden und ungeladenen Medium ausbreiten, kann wieder die aus Aufgabe 14.4 bekannte Beziehung genutzt werden. Nach dieser gilt

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{B}}_1 &= \frac{1}{\omega}\left(\vec{k}_1 \times \underline{\vec{E}}_1\right) = \frac{1}{\omega}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & k_z \\ \frac{E_0}{5} & -\frac{2E_0}{5} & 0 \end{vmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\vec{r}} \\
&= -\frac{k_z}{\omega}\left(-\frac{2E_0}{5}\vec{e}_x - \frac{E_0}{5}\vec{e}_y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\vec{r}} = \underline{\frac{E_0}{5v}\left(2\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}\vec{r}}}
\end{aligned}$$

die magnetische Flussdichte der ersten Welle und

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{E}}_2 &= \frac{\omega}{k_z^2}\left(\underline{\vec{B}}_2 \times \vec{k}_2\right) = \frac{\omega}{k_z^2}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4B_0 & -3B_0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{vmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \\
&= \frac{\omega}{k_z}\left(-3B_0\vec{e}_x - 4B_0\vec{e}_y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} = \underline{-vB_0\left(3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}}
\end{aligned}$$

die elektrische Feldstärke der zweiten Welle. Wie man aus der Betrachtung des elektrischen oder des magnetischen Feldes der Welle erkennt, ist die Phase der x- und y-Feldkomponente jeweils identisch, sodass es sich gemäß Aufgabe 14.2 in beiden Fällen um linear polarisierte Wellen handelt.

14.7 Überlagerung zweier ebener Wellen

Aus der gegebenen Ausbreitungsrichtung der beiden ebenen, in z-Richtung polarisierten Wellen, welche sich in der xy-Ebene unter dem Winkel $\pm\alpha$ zur x-Achse fortbewegen, lassen sich zunächst leicht die jeweiligen Wellenzahlvektoren zu

$$\vec{k}_1 = k(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y) \qquad \vec{k}_2 = k(\cos\alpha\vec{e}_x - \sin\alpha\vec{e}_y)$$

bestimmen, wobei der Betrag bzw. die Wellenzahl aufgrund der gleichen Frequenz und der Ausbreitung im selben Medium jeweils k ist. Zusammen mit der Amplitude der elektrischen Feldstärke $|\vec{E}(0)| = \frac{E_0}{2}$ im Ursprung stellt man hiermit die Gleichungen des elektrischen Feldes der beiden Wellen auf:

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_1(\vec{r}) &= \frac{E_0}{2}\vec{e}_z \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_1\vec{r}} = \frac{E_0}{2}\vec{e}_z \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}\\ \underline{\vec{E}}_2(\vec{r}) &= \frac{E_0}{2}\vec{e}_z \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_2\vec{r}} = \frac{E_0}{2}\vec{e}_z \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\cos\alpha - y\sin\alpha)}\end{aligned}$$

Die elektrische Gesamtfeldstärke der resultierenden Welle erhält man durch Superposition der Feldstärkevektoren, d.h. durch Addition beider Einzelwellen

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_{\mathrm{res}} &= \underline{\vec{E}}_1 + \underline{\vec{E}}_2 = \frac{E_0}{2}\vec{e}_z\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\cos\alpha + y\sin\alpha)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\cos\alpha - y\sin\alpha)}\right)\\ &= \frac{E_0}{2}\vec{e}_z\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\cos\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ky\sin\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\cos\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{j}ky\sin\alpha}\right)\\ &= E_0\vec{e}_z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\cos\alpha}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}ky\sin\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}ky\sin\alpha}\right)}_{=\cos(ky\sin\alpha)} = \underline{E_0\cos(ky\sin\alpha)\vec{e}_z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\cos\alpha}}\end{aligned}$$

womit der Wellenvektor der resultierenden Welle $\underline{\vec{k}_{\mathrm{res}} = k\cos\alpha\,\vec{e}_x}$ lautet. Da sich aus der Überlagerung der beiden ursprünglichen Wellen nun jedoch keine ebene Welle ergibt, kann auch die zugehörige magnetische Flussdichte nicht über das Kreuzprodukt von resultierendem Wellenzahlvektor und elektrischem Gesamtfeld berechnet werden; dies ist nur für jede Ausgangswelle getrennt möglich:

$$\begin{aligned}\underline{\vec{B}}_{1/2} &= \frac{1}{\omega}\left(\vec{k}_{1/2}\times\underline{\vec{E}}_{1/2}\right) = \frac{1}{\omega}\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ k\cos\alpha & \pm k\sin\alpha & 0\\ 0 & 0 & \frac{E_0}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\cos\alpha \pm y\sin\alpha)}\end{vmatrix}\\ &= \pm\frac{kE_0}{2\omega}\left(\sin\alpha\vec{e}_x \mp \cos\alpha\vec{e}_y\right)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\cos\alpha\pm y\sin\alpha)}\end{aligned}$$

Die magnetische Gesamtflussdichte folgt dann wiederum aus einer Addition beider Einzelfeldbeiträge

$$\begin{aligned}\underline{\vec{B}}_{\mathrm{res}} &= \underline{\vec{B}}_1 + \underline{\vec{B}}_2 = \frac{kE_0}{2\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\cos\alpha}\left[(\sin\alpha\vec{e}_x - \cos\alpha\vec{e}_y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ky\sin\alpha} - (\sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_y)\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}ky\sin\alpha}\right]\\ &= -\frac{kE_0}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\cos\alpha}\left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}ky\sin\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}ky\sin\alpha}\right)\sin\alpha\vec{e}_x + \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}ky\sin\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}ky\sin\alpha}\right)\cos\alpha\vec{e}_y\right]\\ &= \underline{-\frac{kE_0}{\omega}\Big(\mathrm{j}\sin(ky\sin\alpha)\sin\alpha\vec{e}_x + \cos(ky\sin\alpha)\cos\alpha\vec{e}_y\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\cos\alpha}}\end{aligned}$$

14.8 Ebene Welle an einer dielektrischen Grenzschicht

Überlagerung der elektrischen Felder

$$\vec{E}_i(x) = E_{0i}\vec{e}_y \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_1 x)} \qquad \vec{E}_r(x) = E_{0r}\vec{e}_y \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + k_1 x)}$$

der einfallenden (inzidenten) und in positive x-Richtung fortschreitenden Welle sowie der an der Grenzschicht reflektierten und in entgegengesetzte Richtung laufenden Welle im Gebiet mit der Permittivität ε_1, in dem sich diese jeweils mit der gleichen Geschwindigkeit $v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon_1}} = \frac{\omega}{k_1}$ ausbreiten:

$$\vec{E}_1(x) = \vec{E}_i(x) + \vec{E}_r(x) = E_{0i}\vec{e}_y \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_1 x)} + \underbrace{\frac{E_{0r}}{E_{0i}}}_{=:r} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + k_1 x)} \right)$$

Das Verhältnis der Amplituden von reflektierter zu einfallender Welle wird dabei als Reflexionsfaktor r definiert. Gleichsam gilt für die transmittierte und sich im Gebiet der Permittivität ε_2 mit der Geschwindigkeit $v_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon_2}} = \frac{\omega}{k_2}$ bewegende Welle:

$$\vec{E}_2(x) = \vec{E}_t(x) = E_{0t}\vec{e}_y \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_2 x)} = E_{0i}\vec{e}_y \underbrace{\frac{E_{0t}}{E_{0i}}}_{=:t} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_2 x)}$$

für die man analog den Transmissionsfaktor t als Amplitudenverhältnis von transmittierter zu einfallender Welle einführt. Bevor beide Faktoren bestimmt werden können, sind zunächst noch die zugehörigen magnetischen Feldkomponenten zu berechnen. Im Medium 1 ist hierbei die unterschiedliche Ausbreitungsrichtung beider Teilwellen mit $\vec{k}_i = k_1\vec{e}_x = -\vec{k}_r$ zu berücksichtigen, sodass gilt

$$\begin{aligned}
\mu\vec{H}_1 &= \frac{1}{\omega}\left(\vec{k}_i \times \vec{E}_i + \vec{k}_r \times \vec{E}_r\right) = \frac{1}{\omega}\left[k_1\vec{e}_x \times E_{0i}\vec{e}_y \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_1 x)} - k_1\vec{e}_x \times rE_{0i}\vec{e}_y \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + k_1 x)}\right] \\
\vec{H}_1(x) &= \frac{k_1}{\mu\omega} E_{0i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x} - r\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 x}\right)\vec{e}_z = \frac{E_{0i}}{Z_{\mathrm{W1}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x} - r\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 x}\right)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

Die magnetische Feldstärke der Welle im Medium 2 ergibt sich dagegen zu

$$\begin{aligned}
\mu\vec{H}_2 &= \frac{1}{\omega}\left(\vec{k}_t \times \vec{E}_t\right) = \frac{1}{\omega}\left(k_2\vec{e}_x \times tE_{0i}\vec{e}_y \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_2 x)}\right) \\
\vec{H}_2(x) &= \frac{k_2}{\mu\omega} tE_{0i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_2 x)}\vec{e}_z = \frac{tE_{0i}}{Z_{\mathrm{W2}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 x}\vec{e}_z
\end{aligned}$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen der Felder an Grenzflächen folgt weiterhin, dass die Tangentialkomponente der elektrischen und der magnetischen Feldstärke bei $x = 0$ stetig sein muss, womit sich nun zwei Bedingungen zur Bestimmung der beiden Unbekannten aufstellen lassen. Mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \vec{e}_x$ der Grenzschicht ist

$$\begin{aligned}
\vec{n} \times \left(\vec{E}_2(0) - \vec{E}_1(0)\right) &= 0 \\
tE_{0i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\vec{e}_z &= E_{0i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}(1+r)\vec{e}_z \qquad \Rightarrow \qquad \underline{1 + r = t}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\vec{n} \times \left(\vec{H}_2(0) - \vec{H}_1(0)\right) &= \vec{J}_F = 0 \\
\frac{E_{0i}}{Z_{\mathrm{W1}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}(1-r)\vec{e}_y &= \frac{tE_{0i}}{Z_{\mathrm{W2}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\vec{e}_y \qquad \Rightarrow \qquad \underline{1 - r = \frac{Z_{\mathrm{W1}}}{Z_{\mathrm{W2}}}t}
\end{aligned}$$

und man berechnet letztlich

$$\underline{t = \frac{2Z_{\mathrm{W2}}}{Z_{\mathrm{W2}} + Z_{\mathrm{W1}}}} \qquad \underline{r = t - 1 = \frac{Z_{\mathrm{W2}} - Z_{\mathrm{W1}}}{Z_{\mathrm{W2}} + Z_{\mathrm{W1}}}}$$

14.9 Reflexion an einem Dielektrikum über einer leitenden Ebene

Beim Auftreffen elektromagnetischer Wellen auf eine dielektrischen Schicht der Dicke d, welche sich unmittelbar vor einer ideal elektrisch leitfähigen Ebene befindet, kommt es zur Ausbildung von Mehrfachreflexion zwischen den beiden Mediengrenzflächen und damit zur Interferenz zwischen hin- und rücklaufenden Wellen. Neben der Änderung der Amplitude bei Reflexion und Transmission sind also auch die Phasenbeziehungen zueinander zu berücksichtigen.

Für die nachfolgenden Betrachtungen sei der vakuumerfüllte Halbraum als Medium 0, das Dielektrikum als Medium 1 und die ideal leitende untere Hemisphäre als Medium 2 bezeichnet. In jenen Gebieten wirksame Kenngrößen werden gleichsam entsprechend indiziert, d.h. die Wellenzahlen der Propagation im Vakuum und im Dielektrikum lauten

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega_0}{c_0} \qquad \text{bzw.} \qquad k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\omega_0}{c_1}$$

wohingegen sich im Leiter kein elektrisches Feld ausbilden und somit keine Wellenausbreitung stattfinden kann. Die Wellenwiderstände der beiden Propagationsmedien berechnen sich gemäß

$$Z_{\mathrm{W}0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \qquad \text{und} \qquad Z_{\mathrm{W}1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$$

aus der Permeabilität μ und der Permittivität ε der jeweiligen Gebiete. Weiterhin seien die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten der einzelnen Medienübergänge wie in Abbildung (14.2) dargestellt definiert.

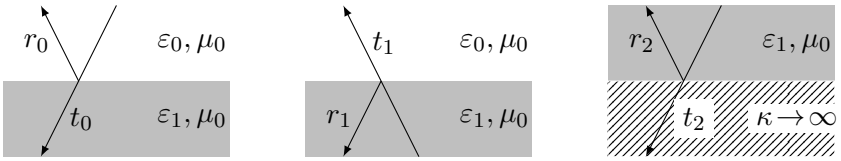


Abbildung 14.2: Festlegung der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die jeweiligen Übergänge.

Mithilfe der Ergebnisse aus der vorangegangenen Aufgabe 14.8 berechnen sich nun für den Übergang vom Vakuum in das Dielektrikum sowie vom Dielektrikum ins Vakuum die Koeffizienten zu

$$r_0 = \frac{Z_{\mathrm{W}1} - Z_{\mathrm{W}0}}{Z_{\mathrm{W}1} + Z_{\mathrm{W}0}} \qquad r_1 = \frac{Z_{\mathrm{W}0} - Z_{\mathrm{W}1}}{Z_{\mathrm{W}0} + Z_{\mathrm{W}1}} = -r_0$$

$$t_0 = \frac{2Z_{\mathrm{W}1}}{Z_{\mathrm{W}1} + Z_{\mathrm{W}0}} \qquad t_1 = \frac{2Z_{\mathrm{W}0}}{Z_{\mathrm{W}0} + Z_{\mathrm{W}1}} = t_0 \frac{Z_{\mathrm{W}0}}{Z_{\mathrm{W}1}}$$

Innerhalb der ideal leitenden Ebene wird wegen $\kappa \to \infty$ (bzw. äquivalent $\varepsilon_2 \to \infty$) der Wellenwiderstand $Z_{\mathrm{W}2}$ zu Null und somit folgt gleichermaßen

$$r_2 = \frac{Z_{\mathrm{W}2} - Z_{\mathrm{W}1}}{Z_{\mathrm{W}2} + Z_{\mathrm{W}1}} = -1 \qquad \text{sowie} \qquad t_2 = \frac{2Z_{\mathrm{W}2}}{Z_{\mathrm{W}2} + Z_{\mathrm{W}1}} = 0$$

d.h. die Welle wird erwartungsgemäß vollständig in das Dielektrikum zurückreflektiert. Das elektrische Feld der senkrecht einfallenden, linear polarisierten Welle betrage

$$\underline{\vec{E}}_i = E_i \vec{e}_x \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 z}$$

Beim ersten Grenzflächenübergang wird dann der Anteil

$$\underline{\vec{E}}_r = r_0 E_i \vec{e}_x \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}$$

in das Vakuum zurückgeworfen, während sich der Wellenanteil

$$\underline{\vec{E}}_t = t_0 E_i \vec{e}_x \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 z}$$

im Dielektrikum fortbewegt, an der leitenden Ebene reflektiert wird und nach erneuter Passage der Schicht ein weiteres Mal auf die Grenzfläche trifft.

Reflexions- und Transmissionsvorgänge setzen sich sodann unendlich oft fort, wobei die Amplituden der einzelnen Teilwellen nach jedem Übergang etwas geringer sind als zuvor. Abbildung (14.3) illustriert den beschriebenen Sachverhalt.

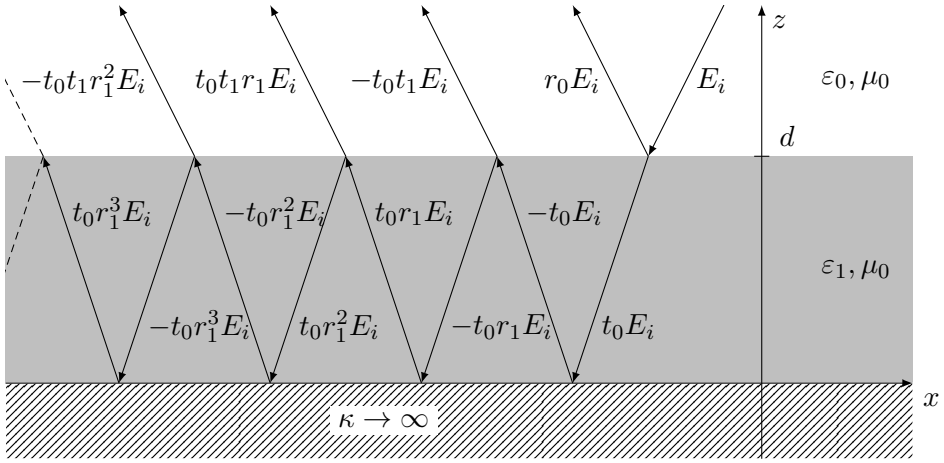


Abbildung 14.3: Mehrfachreflexion innerhalb eines Dielektrikums über einer leitfähigen Ebene.

Das Gesamtfeld, welches sich durch die Mehrfachreflexionen in einem der beiden Propagationsmedien ausbildet, erhält man durch Summation aller Feldbeiträge, d.h. aus der Berechnung der Summe der konvergenten unendlichen Reihe. Für das elektrische Feld im Medium 0 folgt dementsprechend unter Berücksichtigung der Phasenänderung infolge der Laufzeit durch die Schicht

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{E}}_0 &= \vec{E}_i \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 z} + r_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z} - t_0 t_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 2d} + t_0 t_1 r_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 4d} - t_0 t_1 r_1^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 6d} + \ldots \right) \\
&= \vec{E}_i \left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z} \left(r_0 - t_0 t_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 2d} + t_0 t_1 r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 4d} - t_0 t_1 r_1^2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 6d} + \ldots \right) \right] \\
&= \vec{E}_i \left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z} \left(r_0 - t_0 t_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r_1^n \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 2(n+1)d} \right) \right] \\
&= \vec{E}_i \left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z} \left(r_0 - t_0 t_1 \mathrm{e}^{2\mathrm{j}k_1 d} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -r_1 \mathrm{e}^{2\mathrm{j}k_1 d} \right\}^n \right) \right]
\end{aligned}$$

Diese unendliche Reihe kann nun mit der bekannten Summe der geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für} \qquad |x| < 1$$

ausgedrückt werden, denn es ist $x \mathrel{\widehat{=}} -r_1 \mathrm{e}^{2\mathrm{j}k_1 d}$ und $|r_1 \mathrm{e}^{2\mathrm{j}k_1 d}| = |r_1| < 1$. Somit folgt definitionsgemäß

$$\underline{\vec{E}}_0 = \vec{E}_i \left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z} \underbrace{\left(r_0 - \frac{t_0 t_1 e^{2\mathrm{j}k_1 d}}{1 + r_1 e^{2\mathrm{j}k_1 d}} \right)}_{=: \underline{r}} \right] = \vec{E}_i \left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 z} + \underline{r} e^{-\mathrm{j}k_0 z} \right]$$

da jener zweite Summand von Reflektionen der ursprünglichen Welle herrührt. Nach weiteren Umformungsschritten gelangt man schließlich zu einem Ausdruck für den komplexen Reflexionsfaktor

$$\begin{aligned}
\underline{r} &= r_0 - \frac{t_0 t_1 e^{2\mathrm{j}k_1 d}}{1 + r_1 e^{2\mathrm{j}k_1 d}} = \frac{r_0 + (r_0 r_1 - t_0 t_1) e^{2\mathrm{j}k_1 d}}{1 + r_1 e^{2\mathrm{j}k_1 d}} = \frac{r_0 - e^{2\mathrm{j}k_1 d}}{1 - r_0 e^{2\mathrm{j}k_1 d}} \\
&= \frac{(Z_{\mathrm{W}1} - Z_{\mathrm{W}0}) e^{-\mathrm{j}k_1 d} - (Z_{\mathrm{W}1} + Z_{\mathrm{W}0}) e^{\mathrm{j}k_1 d}}{(Z_{\mathrm{W}1} + Z_{\mathrm{W}0}) e^{-\mathrm{j}k_1 d} - (Z_{\mathrm{W}1} - Z_{\mathrm{W}0}) e^{\mathrm{j}k_1 d}} \\
&= \frac{-Z_{\mathrm{W}1} \left(e^{\mathrm{j}k_1 d} - e^{-\mathrm{j}k_1 d} \right) - Z_{\mathrm{W}0} \left(e^{\mathrm{j}k_1 d} + e^{-\mathrm{j}k_1 d} \right)}{-Z_{\mathrm{W}1} \left(e^{\mathrm{j}k_1 d} - e^{-\mathrm{j}k_1 d} \right) + Z_{\mathrm{W}0} \left(e^{\mathrm{j}k_1 d} + e^{-\mathrm{j}k_1 d} \right)} \\
&= -\frac{2\mathrm{j} Z_{\mathrm{W}1} \sin(k_1 d) + 2 Z_{\mathrm{W}0} \cos(k_1 d)}{2\mathrm{j} Z_{\mathrm{W}1} \sin(k_1 d) - 2 Z_{\mathrm{W}0} \cos(k_1 d)} = -\frac{Z_{\mathrm{W}1} \sin(k_1 d) - \mathrm{j} Z_{\mathrm{W}0} \cos(k_1 d)}{Z_{\mathrm{W}1} \sin(k_1 d) + \mathrm{j} Z_{\mathrm{W}0} \cos(k_1 d)}
\end{aligned}$$

Alternativ zum Lösungsweg unter Berücksichtigung der Mehrfachreflektionen im Dielektrikum lässt sich der Reflektionsfaktor auch durch Aufstellen allgemeiner Ausdrücke für die Felder in den einzelnen Teilgebieten und einer Anwendung der Stetigkeitsbedingungen an den jeweiligen Mediengrenzflächen berechnen. Hierzu werden zunächst die Wellenfelder von transmittierter und reflektierter Welle wie in Abbildung (14.4) durch die der inzidenten Welle ausgedrückt und dabei die noch zu bestimmenden Faktoren C_1, C_2 und r eingeführt. Mit diesem Formalismus ist dann bereits eine Superposition vieler beteiligter Teilwellen zusammenfassend berücksichtigt.

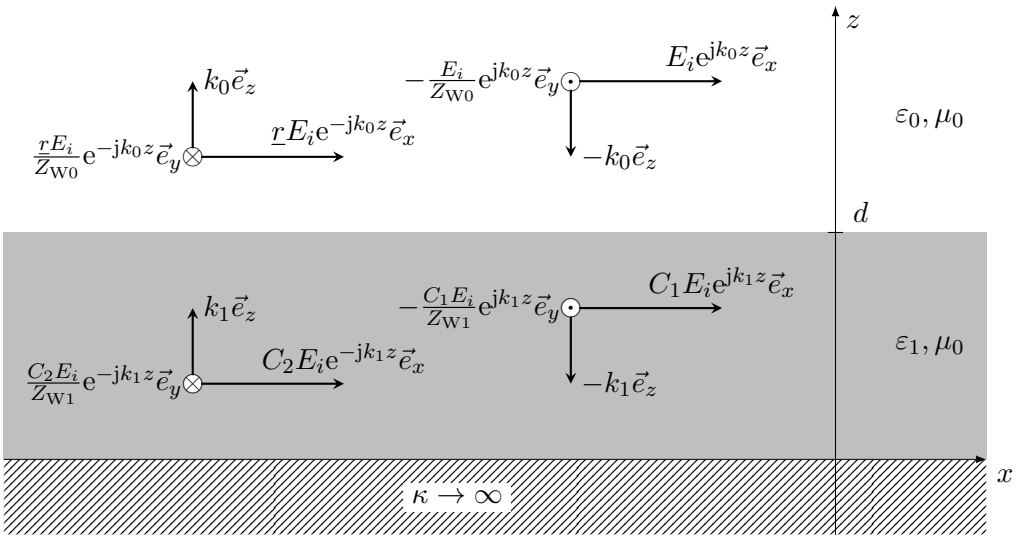


Abbildung 14.4: Reflexion einer inzidenten Welle an einer leitfähigen Ebene.

Elektrisches und magnetisches Gesamtfeld im Vakuum (Medium 0) lauten dann dementsprechend

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_0 &= \vec{E}_i\left(e^{jk_0z} + \underline{r}e^{-jk_0z}\right)\vec{e}_x \\ \underline{\vec{H}}_0 &= -\frac{E_i}{Z_{W0}}\left(e^{jk_0z} - \underline{r}e^{-jk_0z}\right)\vec{e}_y\end{aligned}$$

und analog stellt man für das Dielektrikum die Beziehungen

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_1 &= \vec{E}_i\left(C_1e^{jk_1z} + C_2e^{-jk_1z}\right)\vec{e}_x \\ \underline{\vec{H}}_1 &= -\frac{E_i}{Z_{W1}}\left(C_1e^{jk_1z} - C_2e^{-jk_1z}\right)\vec{e}_y\end{aligned}$$

auf. Im gesamten Leitergebiet gilt dagegen $\underline{\vec{E}}_2 = 0$. Hieraus folgt aufgrund der Stetigkeit der elektrischen Tangentialfeldkomponente an der Grenzfläche bei $z = 0$ auch sofort

$$\underline{\vec{E}}_1(z=0) = \vec{E}_i(C_1 + C_2)\vec{e}_x \stackrel{!}{=} 0 = \underline{\vec{E}}_2(z=0) \qquad \rightarrow \qquad \underline{C_2 = -C_1}$$

Die Anwendung der Stetigkeitsbedingungen an der Grenzschicht zwischen Vakuum und dielektrischer Schicht bei $z = d$ liefert

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_0(z=d) = \vec{E}_i\left(e^{jk_0d} + \underline{r}e^{-jk_0d}\right)\vec{e}_x &\stackrel{!}{=} \vec{E}_iC_1\left(e^{jk_1d} - e^{-jk_1d}\right)\vec{e}_x = \underline{\vec{E}}_1(z=d) \\ e^{jk_0d} + \underline{r}e^{-jk_0d} &= 2jC_1\sin(k_1d) \\ \underline{\vec{H}}_0(z=d) = -\frac{E_i}{Z_{W0}}\left(e^{jk_0d} - \underline{r}e^{-jk_0d}\right)\vec{e}_y &\stackrel{!}{=} -\frac{C_1E_i}{Z_{W1}}\left(e^{jk_1d} + e^{-jk_1d}\right)\vec{e}_y = \underline{\vec{H}}_1(z=d) \\ Z_{W1}\left(e^{jk_0d} - \underline{r}e^{-jk_0d}\right) &= 2Z_{W0}C_1\cos(k_1d)\end{aligned}$$

Eliminieren von C_1 und Umstellen nach $\underline{r}$ führt schließlich auf den gesuchten Reflektionsfaktor

$$\begin{aligned}Z_{W0}\cos(k_1d)\left(e^{jk_0d} + \underline{r}e^{-jk_0d}\right) &= jZ_{W1}\sin(k_1d)\left(e^{jk_0d} - \underline{r}e^{-jk_0d}\right) \\ \rightarrow \qquad \underline{r} &= e^{2jk_0d}\frac{Z_{W1}\sin(k_1d) + jZ_{W0}\cos(k_1d)}{Z_{W1}\sin(k_1d) - jZ_{W0}\cos(k_1d)}\end{aligned}$$

14.10 TE-Wellen im Rechteckhohlleiter

Zur Herleitung der elektrischen und magnetischen Feldverteilungen innerhalb eines Rechteckhohlleiters wird die in Abbildung 14.5 dargestellte Hohlleiteranordnung der Breite a und Höhe b betrachtet, die entlang der z-Achse verlaufe und deren Wände aus ideal leitendem Material mit $\kappa \to \infty$ bestehen.

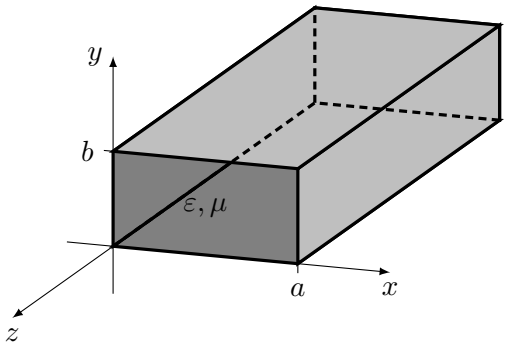


Abbildung 14.5: In z-Richtung verlaufender Rechteckhohlleiter der Breite a und Höhe b

Eine solche Anordnung schränkt die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Inneren in beiden Querrichtungen ein, da es an den Leiterwänden zu Reflexionen kommt und somit nur eine Propagation in positive oder negative z-Richtung möglich ist. Entsprechend lässt sich als Ansatz ein Feldverlauf über den Querschnitt des Hohlleiters annehmen, welcher als Welle in Längsrichtung fortschreitet. Beschränkt man sich in der Betrachtung z.B. auf eine Ausbreitung in positive z-Richtung, so lautet der Ansatz

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} \qquad \text{und} \qquad \vec{H}(x,y,z,t) = \vec{H}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)}$$

Setzt man diesen in die Wellengleichung ein, wie sie z.B. in Aufgabe 2.8 für das elektrische Feld hergeleitet wurde, so folgt mit $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{E} = -k^2\vec{E}$

$$\left[\triangle + \omega^2\mu\varepsilon\right]\vec{E} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\mu\varepsilon\right]\vec{E} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \underbrace{\omega^2\mu\varepsilon - k^2}_{=:\gamma^2}\right]\vec{E} = 0$$

und analog für das magnetische Feld

$$\left[\triangle + \omega^2\mu\varepsilon\right]\vec{H} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right]\vec{H} = 0$$

wobei die neu eingeführte Konstante γ häufig auch als Hohlleiter-Wellenzahl bezeichnet wird. Weiterhin gelten das Induktions- und das Durchflutungsgesetz der Maxwell-Gleichungen, die sich im Falle zeitharmonischer Vorgänge und ohne Anregung bzw. fernab einer Quelle ($\vec{J} = 0$) formulieren als

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -\mathrm{j}\omega\mu \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \\
\operatorname{rot}\vec{H} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathrm{j}\omega\varepsilon \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mithilfe dieser sechs Komponentengleichungen können nun die transversalen Feldkomponenten E_x, E_y, H_x und H_y durch die axialen Feldkomponenten E_z und H_z ausgedrückt werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{j}\omega\varepsilon E_x &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\right] = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z}\right) \\
&= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\left(-k^2 E_x + \mathrm{j}k\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{k}{\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{k^2}{\omega\mu}E_x \\
\mathrm{j}\left(\omega^2\mu\varepsilon - k^2\right)E_x &= \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y} + k\frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{E_x = -\frac{\mathrm{j}}{\gamma^2}\left[k\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right]}
\end{aligned}$$

Gleichermaßen erhält man für die elektrische Feldstärke in y-Richtung

$$\begin{aligned}
\mathrm{j}\omega\varepsilon E_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{k}{\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{k^2}{\omega\mu}E_y \\
\mathrm{j}\left(\omega^2\mu\varepsilon E_y - k^2\right)E_y &= k\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{E_y = -\frac{\mathrm{j}}{\gamma^2}\left[k\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right]}
\end{aligned}$$

sowie die magnetische Feldstärke in x-Richtung

$$\begin{aligned}
-\mathrm{j}\omega\mu H_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\mathrm{j}}{\omega\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial z}\right) = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{k}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial x} - \mathrm{j}\frac{k^2}{\omega\varepsilon}H_x \\
-\mathrm{j}\left(\omega^2\mu\varepsilon - k^2\right)H_x &= \omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y} - k\frac{\partial H_z}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{H_x = -\frac{\mathrm{j}}{\gamma^2}\left[k\frac{\partial H_z}{\partial x} - \omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y}\right]}
\end{aligned}$$

und in y-Richtung

$$\begin{aligned}
-\mathrm{j}\omega\mu H_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{k}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial x} - \mathrm{j}\frac{k^2}{\omega\varepsilon}H_y \\
-\mathrm{j}\left(\omega^2\mu\varepsilon - k^2\right)H_y &= -k\frac{\partial H_z}{\partial y} - \omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{H_y = -\frac{\mathrm{j}}{\gamma^2}\left[k\frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x}\right]}
\end{aligned}$$

Je nach Art der Welle sind nun folgende Fälle möglich:

- bei transversal-elektromagnetischen Wellen (TEM-Wellen) verschwinden sowohl elektrische als auch magnetische Felder in Ausbreitungsrichtung und es gilt $E_z = 0$ sowie $H_z = 0$. Anhand obiger Relationen macht man sich leicht klar, dass dann auch alle transversalen Feldkomponenten Null werden. Entsprechend sind TEM-Wellen in Rechteckhohlleitern also nicht ausbreitungsfähig.

- bei transversal-elektrischen Wellen (TE-Wellen) verschwindet das elektrische Feld in Ausbreitungsrichtung ($E_z = 0$) und die transversalen Feldkomponenten können über die axiale magnetische Komponente H_z bestimmt werden.

- bei transversal-magnetischen Wellen (TM-Wellen) verschwindet das magnetische Feld in Ausbreitungsrichtung ($H_z = 0$) und die transversalen Feldkomponenten können über die axiale elektrische Komponente E_z bestimmt werden.

An dieser Stelle wird der Vorteil der Formulierung der Transversalkomponenten über die Felder in Ausbreitungsrichtung deutlich. Da sich im Hohlleiter nur TE- oder TM-Wellen fortbewegen können, entfällt eine der beiden axialen Feldkomponenten und es verbleibt die Lösung der Wellengleichung für die jeweils andere, aus der sich schließlich die übrigen berechnen lassen.

Ausbreitung transversal-elektrischer Wellen (TE-Wellen)

Treten im Hohlleiter TE-Wellen auf, so erfolgt die Berechnung wegen $E_z = 0$ über die nichtverschwindende magnetische Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung. Zur Lösung der Wellengleichung für H_z

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right] H_z(x,y) = 0$$

verwendet man den kartesischen Separationsansatz

$$H_z(x,y) = X(x)\cdot Y(y) \qquad \curvearrowright \qquad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = X_{xx}(x)Y(y) \quad , \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = X(x)Y_{yy}(y)$$

mit dem die Wellengleichung die Form

$$\begin{aligned} X_{xx}(x)Y(y) + X(x)Y_{yy}(y) + \gamma^2 X(x)Y(y) &= 0 \qquad \Big| /XY \neq 0 \\ \underbrace{\frac{X_{xx}(x)}{X(x)}}_{=:f(x)} + \underbrace{\frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)}}_{=:g(y)} + \gamma^2 &= 0 \end{aligned}$$

annimmt. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f(x) + g(y) + \gamma^2\Big] = f'(x) &= 0 \qquad \rightarrow \qquad f(x) = \text{const.} =: -k_x^2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Big[f(x) + g(y) + \gamma^2\Big] = g'(y) &= 0 \qquad \rightarrow \qquad g(y) = \text{const.} =: -k_y^2 \\ \Rightarrow \qquad \gamma^2 &= k_x^2 + k_y^2 \end{aligned}$$

sind die einzelnen Summanden konstant und das ursprünglich zweidimensionale Problem über dem Hohlleiterquerschnitt zerfällt infolge der Separation in zwei eindimensionale Probleme in beiden Querrichtungen. Für die Abhängigkeit in x-Richtung löst man die hieraus erhaltene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$f(x) = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -k_x^2 \qquad \rightarrow \qquad X_{xx}(x) + k_x^2 X(x) = 0$$

mithilfe des Ansatzes

$$\underline{X(x) = C_1\cos(k_x x) + C_2\sin(k_x x)} \qquad \text{mit} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

Ebenso verfährt man mit der Abhängigkeit in y-Richtung

$$g(y) = \frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} = -k_y^2 \qquad \rightarrow \qquad Y_{yy}(y) + k_y^2 Y(y) = 0$$

und erhält als Lösung

$$\underline{Y(y) = C_3\cos(k_y y) + C_4\sin(k_y y)} \qquad \text{mit} \quad C_3, C_4 \in \mathbb{C}$$

Insgesamt ist damit das Ergebnis des magnetischen Axialfeldes gemäß Ansatz

$$\underline{H_z(x,y) = X(x)Y(y) = [C_1\cos(k_x x) + C_2\sin(k_x x)][C_3\cos(k_y y) + C_4\sin(k_y y)]}$$

Da keinerlei Randbedingungen für die magnetische Feldstärke bekannt sind, müssen zur Bestimmung der Integrationskonstanten zunächst die elektrischen Transversalfelder E_x und E_y berechnet werden. Diese lauten

$$\begin{aligned} E_x(x,y) &= -\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} = +\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma^2}k_y[C_1\cos(k_x x) + C_2\sin(k_x x)][C_3\sin(k_y y) - C_4\cos(k_y y)] \\ E_y(x,y) &= +\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma^2}k_x[C_1\sin(k_x x) - C_2\cos(k_x x)][C_3\cos(k_y y) + C_4\sin(k_y y)] \end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke an den Hohlleiterwänden und der Tatsache, dass diese aufgrund der als ideal angenommenen Leitfähigkeit im Leitermaterial verschwindet, gilt also

$$
\begin{aligned}
E_x(x,0) \stackrel{!}{=} 0 &= \underbrace{-C_4\, k_y \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma^2}[C_1\cos(k_x x) + C_2\sin(k_x x)]}_{\neq 0} \qquad \rightarrow \qquad \underline{C_4 = 0} \\
E_x(x,b) \stackrel{!}{=} 0 &= C_3 k_y \sin(k_y b)\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma^2}[C_1\cos(k_x x) + C_2\sin(k_x x)] \qquad \stackrel{C_3\neq 0}{\rightarrow} \qquad \sin(k_y b) = 0 \\
&\curvearrowright \quad \underline{k_y = \frac{n\pi}{b}} \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \\
E_y(0,y) \stackrel{!}{=} 0 &= C_2 \underbrace{C_3 k_x \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma^2}\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}_{\neq 0} \qquad \rightarrow \qquad \underline{C_2 = 0} \\
E_y(a,y) \stackrel{!}{=} 0 &= -C_1 C_3 k_x \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma^2}\sin(k_x a)\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad \stackrel{C_1\neq 0}{\rightarrow} \qquad \sin(k_x a) = 0 \\
&\curvearrowright \quad \underline{k_x = \frac{m\pi}{a}} \qquad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Fasst man die beiden verbliebenen Konstanten nun noch zur Amplitude des Feldes $H_0 := C_1 C_3$ zusammen, folgt die magnetische Feldstärke in Ausbreitungsrichtung zu

$$\underline{H_z(x,y) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}$$

Die Magnetfeldkomponenten in x- und in y-Richtung sind dann

$$
\begin{aligned}
H_x(x,y) &= -\frac{\mathrm{j}k}{\gamma^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\mathrm{j}kH_0}{\gamma^2}\frac{m\pi}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\
H_y(x,y) &= -\frac{\mathrm{j}k}{\gamma^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} = \underline{\frac{\mathrm{j}kH_0}{\gamma^2}\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}
\end{aligned}
$$

und die transversalen elektrischen Felder schreiben sich mit $\omega\mu = kZ_{\mathrm{W}}$ als

$$
\begin{aligned}
E_x(x,y) &= \frac{\mathrm{j}kH_0 Z_{\mathrm{W}}}{\gamma^2}\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\
E_y(x,y) &= \underline{-\frac{\mathrm{j}kH_0 Z_{\mathrm{W}}}{\gamma^2}\frac{m\pi}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}
\end{aligned}
$$

wobei die Hohlleiter-Wellenzahl γ über die Beziehung

$$\underline{\gamma = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \omega^2\mu\varepsilon - k^2}$$

definiert ist. In Abhängigkeit der Werte von m und n ergeben sich nun unterschiedliche Ausbreitungsmoden der TE-Welle innerhalb des Hohlleiters, d.h. es sind verschiedene Eigenschwingungen der elektromagnetischen Welle zwischen den metallischen Wänden möglich. Abgesehen von dem Fall $m = n = 0$, für den man lediglich die triviale Lösung $H_z = 0$ und somit keine Wellenausbreitung erhält, sind dabei theoretisch alle höheren Moden denkbar. Die niedrigste Grundschwingung ist demzufolge die TE_{01}- oder TE_{10}-Mode, welche auch häufig zum Energietransport in Rechteckhohlleitern zur Anwendung kommt.

Ausbreitung transversal-magnetischer Wellen (TM-Wellen)

Wird statt transversal-elektrischer die Ausbreitung transversal-magnetischer Wellen im Hohlleiter betrachtet, gelten die gleichen Überlegungen wie zuvor ganz analog für die elektrische Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung. Aus dem Separationsansatz für E_z erhält man die Lösung

$$\underline{E_z(x,y) = X(x)Y(y) = [C_1\cos(k_x x) + C_2\sin(k_x x)][C_3\cos(k_y y) + C_4\sin(k_y y)]}$$

auf die unmittelbar die bekannten Randbedingungen angewendet und die Konstanten bestimmt werden können. Wiederum verschwinden die elektrischen Tangentialkomponenten an Leiterwänden und es ist

$$\begin{aligned}
E_z(0,y) \overset{!}{=} 0 &= C_1 \underbrace{[C_3\cos(k_y y) + C_4\sin(k_y y)]}_{\neq 0} \qquad \rightarrow \qquad \underline{C_1 = 0} \\
E_z(a,y) \overset{!}{=} 0 &= C_2\sin(k_x a)[C_3\cos(k_y y) + C_4\sin(k_y y)] \qquad \overset{C_2\neq 0}{\rightarrow} \qquad \sin(k_x a) = 0 \\
&\curvearrowright \quad \underline{k_x = \frac{m\pi}{a}} \qquad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N} \\
E_z(x,0) \overset{!}{=} 0 &= C_3 \underbrace{C_2\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)}_{\neq 0} \qquad \rightarrow \qquad \underline{C_3 = 0} \\
E_z(x,b) \overset{!}{=} 0 &= C_2 C_4 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin(k_y b) \qquad \overset{C_4\neq 0}{\rightarrow} \qquad \sin(k_y b) = 0 \\
&\curvearrowright \quad \underline{k_y = \frac{n\pi}{b}} \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Das Produkt der beiden Konstanten C_2 und C_4 wird zur Amplitude $E_0 := C_2 C_4$ zusammengefasst, sodass die elektrische Feldstärke in Längsrichtung schließlich zu

$$\underline{E_z(x,y) = E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}$$

folgt. Mit $\omega\varepsilon = \frac{k}{Z_\mathrm{W}}$ berechnen sich die Feldkomponenten in x- und in y-Richtung damit gemäß

$$\begin{aligned}
E_x(x,y) &= -\frac{\mathrm{j}k}{\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\mathrm{j}kE_0}{\gamma^2}\frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\
E_y(x,y) &= -\frac{\mathrm{j}k}{\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\mathrm{j}kE_0}{\gamma^2}\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\
H_x(x,y) &= \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\mathrm{j}kE_0}{\gamma^2 Z_\mathrm{W}}\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\
H_y(x,y) &= -\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} = \underline{-\frac{\mathrm{j}kE_0}{\gamma^2 Z_\mathrm{W}}\frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}
\end{aligned}$$

Anhand des Ausdrucks für E_z ist ersichtlich, dass sich nur im Falle von $m \neq 0$ und $n \neq 0$ nichttriviale Lösungen der Felder im Hohlleiter ergeben. Bei TM-Wellen ist die niedrigste ausbreitungsfähige Grundmode also die TM_{11}-Mode.

15 Feld von Linearantennen

Eine Linearantenne stellt eine Leiteranordnung mit linienförmiger Geometrie und dementsprechend eindimensionaler Stromverteilung dar, welche zur Erzeugung und Aussendung elektromagnetischer Wellen genutzt wird. Das von ihr an einem Punkt des Raumes hervorgerufene Feld lässt sich aus ihrer spezifischen Form und der eingeprägten Stromverteilung berechnen. Zur Herleitung der hierfür benötigten Gleichung wird dabei von zeitharmonischen Anregungsvorgängen ausgegangen und das Induktionsgesetz der MAXWELL-Gleichungen betrachtet. Mithilfe des magnetischen Vektorpotentials $\vec{A}$ kann dieses geschrieben werden als

$$\operatorname{rot}\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}\omega\underline{\vec{B}} \overset{\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}}{=} -\mathrm{j}\omega\operatorname{rot}\underline{\vec{A}} \qquad \rightarrow \qquad \operatorname{rot}\underbrace{\left(\underline{\vec{E}} + \mathrm{j}\omega\underline{\vec{A}}\right)}_{=:-\operatorname{grad}\Phi} = \vec{0}$$

Aufgrund der Vektoridentität $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi = \vec{0}$ wird das Argument der Rotation über den Gradienten des Skalarpotentials Φ ausgedrückt, wobei es sich bei dem negativen Vorzeichen lediglich um eine Konvention handelt. Hiermit kann nun das Durchflutungsgesetz umgeformt werden zu

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\underline{\vec{H}} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\underline{\vec{B}} &= \underline{\vec{J}} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{J}} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\left(-\operatorname{grad}\Phi - \mathrm{j}\omega\underline{\vec{A}}\right) \\
\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\underline{\vec{A}}\right) = \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\underline{\vec{A}}\right) - \triangle\underline{\vec{A}} &= \mu\underline{\vec{J}} - \mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\operatorname{grad}\Phi + \omega^2\mu\varepsilon\underline{\vec{A}} \\
\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\underline{\vec{A}}\right) - \triangle\underline{\vec{A}} - \omega^2\mu\varepsilon\underline{\vec{A}} &= \mu\underline{\vec{J}} - \mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\operatorname{grad}\Phi
\end{aligned}$$

Nutzt man im Weiteren die LORENZ-Eichung $\operatorname{div}\underline{\vec{A}} = -\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\Phi$, folgt hieraus die inhomogene Wellengleichung für das Vektorpotential $\underline{\vec{A}}$ zu

$$\underline{\triangle\vec{A} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{A} = -\mu\vec{J}} \qquad \text{mit} \qquad k^2 = \omega^2\mu\varepsilon = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

in der k die Wellenzahl darstellt. Als partikuläre Lösung dieser Vektordifferentialgleichung zweiter Ordnung für den Freiraum erhält man

$$\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint\limits_{V'}\frac{\underline{\vec{J}}(\vec{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

Wird von einer radial in Richtung $\vec{e}_r'$ orientierten Linearantenne mit der Stromdichte

$$\underline{\vec{J}}(\vec{r}') = \underline{I}(\vec{r}')\delta(\vec{r}-\vec{r}')\vec{e}_r'$$

und dem Quellpunktvektor $\vec{r}'$ ausgegangen und der Betrag des Differenzvektors in der Form

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'}$$

geschrieben, reduziert sich das Volumenintegral aus obiger Gleichung zu einem Wegintegral über die Stromverteilung $\underline{I}(\vec{r}')$ entlang der durch die Antennengeometrie vorgegebenen Kurve C

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{A}}(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi}\iiint\limits_{V'}\frac{\underline{I}(\vec{r}')\delta(\vec{r}-\vec{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\sqrt{r^2+r'^2-2\vec{r}\vec{r}'}}}{\sqrt{r^2+r'^2-2\vec{r}\vec{r}'}}\mathrm{d}V'\vec{e}_r' \\
&= \frac{\mu}{4\pi}\int\limits_{C}\frac{\underline{I}(\vec{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\sqrt{r^2+r'^2-2\vec{r}\vec{r}'}}}{\sqrt{r^2+r'^2-2\vec{r}\vec{r}'}}\mathrm{d}r'\vec{e}_r'
\end{aligned}$$

Bei Betrachtung des Fernfeldes in ausreichend großer Entfernung $r \gg r'$ von der Antenne vereinfacht sich der Ausdruck für den Abstand und mit der Näherung $(1+x)^{\pm\frac{1}{2}} \approx 1 \pm \frac{x}{2}$ für $x \ll 1$ folgt

$$\begin{aligned}
\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'} &= r\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2}} \overset{r' \ll r}{\approx} r\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2}} \approx r\left(1 - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2}\right) = r - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} \\
\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'}} &\approx \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2}}} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2}\right) = \frac{1}{r} + \underbrace{\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3}}_{\ll 1} \approx \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

sodass die Gleichung des Vektorpotentials nun lautet

$$\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_C \frac{\underline{I}(\vec{r}')\exp\left(-\mathrm{j}kr + \mathrm{j}k\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}\right)}{r}\mathrm{d}r'\vec{e}_r'$$

Die magnetische Feldstärke berechnet sich aus dem Vektorpotential durch Bilden der Rotation gemäß

$$\underline{\vec{H}}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_C \underline{I}(\vec{r}')\operatorname{rot}\left[\underbrace{\frac{1}{r}\exp\left(\mathrm{j}k\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} - \mathrm{j}kr\right)}_{=:\Psi(\vec{r})}\vec{e}_r'\right]\mathrm{d}r'$$

und unter Beachtung der entsprechenden Produktregel sowie der Tatsache, dass der Vektordifferentialoperator nur auf $\vec{r}$ und nicht auf $\vec{r}'$ wirkt, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(\Psi\vec{e}_r'\right) &= \operatorname{grad}\Psi \times \vec{e}_r' + \Psi\underbrace{\operatorname{rot}\vec{e}_r'}_{=\vec{0}} = \operatorname{grad}\Psi \times \vec{e}_r' \\
\operatorname{grad}\Psi(\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\exp\left(\mathrm{j}k\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} - \mathrm{j}kr\right)\right]\vec{e}_r = \left[-\frac{1}{r^2}\exp(\ldots) + \frac{1}{r}\exp(\ldots)\frac{\partial}{\partial r}\left(\mathrm{j}k\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} - \mathrm{j}kr\right)\right]\vec{e}_r \\
&= \left[-\frac{1}{r^2} - \frac{\mathrm{j}k}{r}\right]\exp\left(\mathrm{j}k\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} - \mathrm{j}kr\right)\vec{e}_r \overset{\frac{1}{r^2} \ll \frac{1}{r}}{\approx} -\frac{\mathrm{j}k}{r}\exp\left(\mathrm{j}k\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} - \mathrm{j}kr\right)\vec{e}_r
\end{aligned}$$

womit als Ergebnis schließlich folgt

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{H}}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi}\int_C \underline{I}(\vec{r}')\left[-\frac{\mathrm{j}k}{r}\exp\left(-\mathrm{j}kr\right)\exp\left(\mathrm{j}k\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}\right)\vec{e}_r \times \vec{e}_r'\right]\mathrm{d}r' \\
&= \frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\frac{\exp(-\mathrm{j}kr)}{r}\int_C \underline{I}(\vec{r}')\exp\left(\mathrm{j}k\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}\right)\mathrm{d}r'\vec{e}_r' \times \vec{e}_r \\
&= \underline{\frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\int_C \underline{I}(\vec{r}')\exp\left(\mathrm{j}k\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}\right)\mathrm{d}\vec{r}' \times \frac{\vec{r}}{r}}
\end{aligned}$$

15.1 Anordnung mit einer Linearantenne

Die entlang der y-Achse im Bereich $y' \in [0; \frac{\lambda}{2}]$ verlaufende Linearantenne mit der Stromverteilung $\underline{I}(\vec{r}') = \underline{I}_0 \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} y'\right)$ wird beschrieben durch den Quellpunktvektor $\vec{r}' = y'\vec{e}_y$. Das vektorielle Wegelement für die Integration lautet demnach $\mathrm{d}\vec{r}' = \mathrm{d}y'\vec{e}_y$. Mit dem Ortsvektor des Beobachtungspunktes in der xz-Ebene $\vec{r} = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z$ folgt für das Skalarprodukt $\vec{r}\vec{r}' = 0$ und der Exponentialterm innerhalb des Integrals wird zu Eins.

$$\underline{\vec{H}}(\vec{r}) = \frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\int\limits_C \underline{I}(\vec{r}')\exp\left(\mathrm{j}k\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}\right)\mathrm{d}\vec{r}' \times \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\int\limits_C \underline{I}(\vec{r}')\mathrm{d}\vec{r}' \times \frac{\vec{r}}{r}$$

Die magnetische Feldstärke im Fernfeld berechnet sich somit zu

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{H}}(x,z) &= \mathrm{j}k\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\sqrt{x^2+z^2}}}{4\pi\sqrt{x^2+z^2}}\int\limits_0^{\frac{\lambda}{2}} \underline{I}_0\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}y'\right)\mathrm{d}y'\vec{e}_y \times \frac{x\vec{e}_x + z\vec{e}_z}{\sqrt{x^2+z^2}} \\
&= \mathrm{j}k\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\sqrt{x^2+z^2}}}{4\pi}\frac{z\vec{e}_x - x\vec{e}_z}{x^2+z^2}\underline{I}_0\int\limits_0^{\frac{\lambda}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}y'\right)\mathrm{d}y' = \mathrm{j}k\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\sqrt{x^2+z^2}}}{4\pi}\frac{z\vec{e}_x - x\vec{e}_z}{x^2+z^2}\underline{I}_0\left[\frac{\lambda}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}y'\right)\right]_0^{\frac{\lambda}{2}} \\
&\overset{k=\frac{2\pi}{\lambda}}{=} \mathrm{j}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\sqrt{x^2+z^2}}}{2}\frac{z\vec{e}_x - x\vec{e}_z}{x^2+z^2}\frac{\underline{I}_0}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right) = \underline{\mathrm{j}\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\sqrt{x^2+z^2}}}{2\pi}\frac{z\vec{e}_x - x\vec{e}_z}{x^2+z^2}}
\end{aligned}$$

15.2 Anordnung mit zwei Linearantennen

Bei zusammengesetzten Anordnungen aus mehreren Linearantennen lässt sich die von diesen hervorgerufene magnetische Feldstärke durch Superposition der Feldbeiträge der Einzelantennen berechnen. Im vorliegenden Fall beschreibt $\vec{r} = z\vec{e}_z$ den Beobachtungspunkt auf der z-Achse und $\vec{r}_x' = x'\vec{e}_x$ sowie $\vec{r}_y' = y'\vec{e}_y$ die Quellpunktvektoren der beiden entlang der x- bzw. y-Achse orientierten Antennen mit den Stromverteilungen $\underline{I}_x(\vec{r}') = \underline{I}_0\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}x'\right)$ und $\underline{I}_y(\vec{r}') = \underline{I}_0\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}y'\right)$, jeweils im Bereich $x', y' \in [-\frac{\lambda}{4}; \frac{\lambda}{4}]$. Da Quell- und Ortsvektor wiederum senkrecht aufeinander stehen, ist das Skalarprodukt Null und der Exponentialterm im Integranden vereinfacht sich zu Eins. Im Fernfeld folgt somit

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{H}}_x(\vec{r}) &= \mathrm{j}k\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{4\pi|z|}\int\limits_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}}\underline{I}_0\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}x'\right)\mathrm{d}x'\vec{e}_x \times \frac{z\vec{e}_z}{|z|} = -\mathrm{j}k\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{4\pi}\frac{z\vec{e}_y}{|z|^2}\int\limits_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}x'\right)\mathrm{d}x' \\
&= \mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{4\pi z}\vec{e}_y\left[\frac{\lambda}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}x'\right)\right]_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} = \mathrm{j}\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{2\pi z}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\vec{e}_y = 0
\end{aligned}$$

Analog erhält man für die in y-Richtung orientierte Linearantenne

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{H}}_y(\vec{r}) &= \mathrm{j}k\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{4\pi|z|}\int\limits_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}}\underline{I}_0\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}y'\right)\mathrm{d}y'\vec{e}_y \times \frac{z\vec{e}_z}{|z|} = \mathrm{j}k\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{4\pi}\frac{z\vec{e}_x}{|z|^2}\int\limits_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}y'\right)\mathrm{d}y' \\
&= \mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{4\pi z}\vec{e}_x\left[\frac{\lambda}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}y'\right)\right]_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} = \mathrm{j}\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{2\pi z}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\vec{e}_x \\
&= \mathrm{j}\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{\pi z}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_x = \underline{\mathrm{j}\underline{I}_0\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{2\pi z}\vec{e}_x}
\end{aligned}$$

und damit als magnetische Feldstärke der Gesamtanordnung

$$\underline{\vec{H}}(z) = \underbrace{\underline{\vec{H}}_x(z)}_{=0} + \underline{\vec{H}}_y(z) = \mathrm{j}\underline{I}_0\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{2\pi z}\vec{e}_x$$

15.3 Kreisförmige Linearantenne

Im Falle einer kreisförmigen Leiterschleife vom Radius a als Linearantenne nutzt man zur Berechnung an das Problem angepasste Zylinderkoordinaten. Der Beobachtungspunkt auf der z-Achse wird weiterhin durch $\vec{r} = z\vec{e}_z$ beschrieben. Der Quellpunktvektor drückt sich nun jedoch als $\vec{r}' = a\vec{e}_\varrho$ aus und man erhält durch Ableiten nach dem Winkel φ' das differentielle Wegelement zu $\mathrm{d}\vec{r}' = a\mathrm{d}\varphi'\vec{e}_\varphi$. Wiederum ist $\vec{r}\vec{r}' = 0$ und der Integrand vereinfacht sich entsprechend. Mit der Stromverteilung $\underline{I}(\vec{r}') = \underline{I}_0 \sin\varphi'$ und der gegebenen Stromrichtung im Gegenuhrzeigersinn ist die Integration nach φ' von 0 bis 2π auszuführen und die magnetische Feldstärke im Fernfeld bestimmt sich gemäß

$$\underline{\vec{H}}(\vec{r}) = \mathrm{j}k\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{4\pi|z|}\int_0^{2\pi}\underline{I}_0\sin(\varphi')a\mathrm{d}\varphi'\vec{e}_\varphi \times \frac{z\vec{e}_z}{|z|} = \mathrm{j}ka\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{4\pi}\frac{z}{|z|^2}\int_0^{2\pi}\sin\varphi'\vec{e}_\varrho\mathrm{d}\varphi'$$

Da der Radialeinheitsvektor während der Integration nicht konstant ist und demzufolge nicht vor das Integral gezogen werden kann, drückt man diesen mit $\vec{e}_\varrho = \cos\varphi'\vec{e}_x + \sin\varphi'\vec{e}_y$ durch die kartesischen Basisvektoren aus und berechnet die jeweiligen Feldbeiträge in den entstehenden Teilintegralen getrennt:

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{H}}(z) &= \mathrm{j}ka\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{4\pi z}\left(\vec{e}_x\int_0^{2\pi}\underbrace{\sin\varphi'\cos\varphi'}_{=\frac{1}{2}\sin(2\varphi')}\mathrm{d}\varphi' + \vec{e}_y\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi'\mathrm{d}\varphi'\right)\\
&= \mathrm{j}ka\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{4\pi z}\left(\frac{1}{2}\underbrace{\left[-\frac{1}{2}\cos(2\varphi')\right]_0^{2\pi}}_{=0}\vec{e}_x + \underbrace{\left[\frac{1}{2}\left(\varphi' - \frac{1}{2}\sin(2\varphi')\right)\right]_0^{2\pi}}_{=\pi}\vec{e}_y\right) = \mathrm{j}ka\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{4z}\vec{e}_y
\end{aligned}$$

Entspricht der Kreisumfang der Antenne einer Wellenlänge, d.h. gilt $2\pi a = \lambda$, so ist $ka = 1$ und es folgt als Ergebnis schließlich

$$\underline{\underline{\vec{H}}(z) = \mathrm{j}\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|z|}}{4z}\vec{e}_y}$$

15.4 Zwei parallele Linearantennen

Wie bereits in Aufgabe 15.2 gezeigt, berechnet sich die magnetische Feldstärke der zwei parallel verlaufenden Linearantennen mittels Superposition der einzelnen Feldbeiträge. Beide Antennen besitzen die identische Länge $a = \frac{\lambda}{2}$ und werden in gleicher Weise in negativer z-Richtung vom Strom $\underline{I}(\vec{r}')$ durchflossen mit der Stromverteilung $\underline{I}_1(x = +\frac{a}{2}, 0, z') = \underline{I}_2(x = -\frac{a}{2}, 0, z') = \underline{I}_0\cos\left(\frac{\pi}{a}z'\right)$. Sie unterscheiden sich lediglich in ihrer Position auf der x-Achse, sodass die Quellpunktvektoren durch $\vec{r}'_{1/2} = \pm\frac{a}{2}\vec{e}_x + z'\vec{e}_z$ mit $z' \in [-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}]$ formuliert werden können. Der Aufpunktvektor $\vec{r} = y\vec{e}_y$ liegt auf der y-Achse und steht somit wiederum senkrecht zu beiden Quellvektoren. Folglich berechnet man für die erste Antenne

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{H}}_1(\vec{r}) &= \mathrm{j}k\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|y|}}{4\pi|y|}\int_{+\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}}\underline{I}_0\cos\left(\frac{\pi}{a}z'\right)\mathrm{d}z'\vec{e}_z \times \frac{y\vec{e}_y}{|y|} = -\mathrm{j}k\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|y|}}{4\pi}\frac{y\vec{e}_x}{|y|^2}\int_{+\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{a}z'\right)\mathrm{d}z'\\
&= \mathrm{j}k\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|y|}}{4\pi y}\vec{e}_x\left[\frac{a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{a}z'\right)\right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|y|}}{4\pi y}\frac{\lambda}{2\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{e}_x\\
\underline{\vec{H}}_1(y) &= \mathrm{j}\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|y|}}{2\pi y}\vec{e}_x
\end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{d}\vec{r}'_{1/2} = \mathrm{d}z'\vec{e}_z$ ergibt sich für die zweite Antenne der gleiche Feldbeitrag $\vec{H}_2(y) = \vec{H}_1(y)$ und die gesamte von der Anordnung im Fernfeld hervorgerufene magnetische Feldstärke lautet

$$\underline{\underline{\vec{H}}(y) = \underline{\vec{H}}_1(y) + \underline{\vec{H}}_2(y) = 2\underline{\vec{H}}_1(y) = \mathrm{j}\underline{I}_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|y|}}{\pi y}\vec{e}_x}$$

16 Leitungstheorie der Zweidrahtleitung

16.1 Ersatzschaltbild und Leitungsgleichungen der Zweidrahtleitung

Ausgehend von einer verlustbehafteten zweiadrigen Leitung lässt sich für ein kurzes Leiterstück der Länge Δz das Ersatzschaltbild nach Abbildung 16.1 verwenden. Hierin bezeichnen R' und G' den Widerstands- bzw. Leitwertbelag sowie L' und C' den Induktivitäts- bzw. Kapazitätsbelag der Leitung, also die auf die Länge bezogenen, sogenannten primären Leitungsparameter der Zweidrahtleitung.

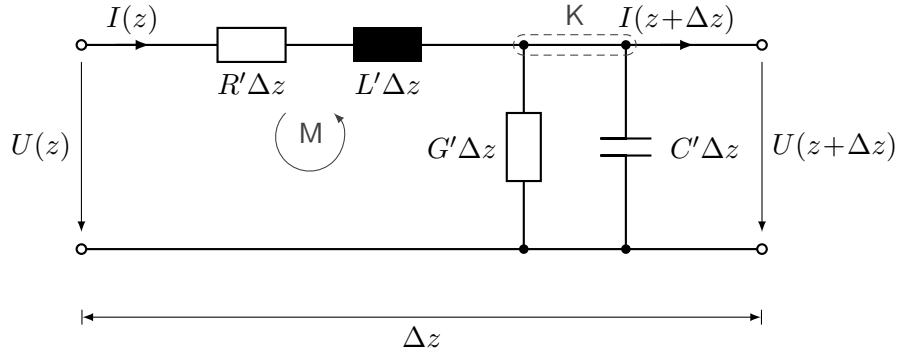


Abbildung 16.1: Ersatzschaltbild eines Leiterstückes der Länge Δz einer zweiadrigen Leitung

Dieses Ersatzschaltbild besitzt Gültigkeit, sofern für elektromagnetische Wellen, die sich entlang der Leitung ausbreiten, eine dominierende TEM-Mode angenommen werden kann, d.h. dass keine bzw. kaum Feldbeiträge in Ausbreitungsrichtung bestehen. Dies ist dann der Fall, wenn der OHMsche Widerstand gegenüber den übrigen Leitungsparametern vernachlässigbar klein ist, also hierüber keine Spannung abfällt. Wendet man auf obigen Vierpol nun den KIRCHHOFFschen Knoten- und Maschensatz an, so ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} M: \qquad U(z) &= U_G + U_L + U_R = U(z{+}\Delta z) + L'\Delta z\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}t} + I(z)R'\Delta z \\ K: \qquad I(z) - I(z{+}\Delta z) &= I_G + I_C = U(z{+}\Delta z)G'\Delta z + C'\Delta z\frac{\mathrm{d}U(z{+}\Delta z)}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

aus denen jeweils der Differenzenquotient für Spannung und Strom gebildet wird

$$\begin{aligned} \frac{U(z{+}\Delta z) - U(z)}{\Delta z} &= -R'I(z) - L'\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}t} = -\left(R' + L'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) I(z) \\ \frac{I(z{+}\Delta z) - I(z)}{\Delta z} &= -G'U(z{+}\Delta z) - C'\frac{\mathrm{d}U(z{+}\Delta z)}{\mathrm{d}t} = -\left(G' + C'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) U(z{+}\Delta z) \end{aligned}$$

Beim Übergang von einem kurzen zu einem infinitesimal langen Leiterabschnitt der Länge $\mathrm{d}z$ über $\Delta z \to 0$ erhält man statt der Differenzenquotienten die Differentiale und damit ein System zweier gekoppelter partieller Differentialgleichungen für Spannung $U(z) \approx U(z{+}\Delta z)$ und Strom $I(z)$. Eine Transformation in den Frequenzbereich liefert für zeitharmonische Vorgänge

$$\underline{\frac{\mathrm{d}\underline{U}(z)}{\mathrm{d}z} = -\left(R' + \mathrm{j}\omega L'\right)\underline{I}(z)} \qquad \underline{\frac{\mathrm{d}\underline{I}(z)}{\mathrm{d}z} = -\left(G' + \mathrm{j}\omega C'\right)\underline{U}(z)}$$

Durch erneutes Ableiten nach z und Einsetzen der jeweils anderen Gleichung lassen sich diese Beziehungen voneinander entkoppeln und es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\underline{U}(z)}{\mathrm{d}z^2} &= -\left(R' + \mathrm{j}\omega L'\right)\frac{\mathrm{d}\underline{I}(z)}{\mathrm{d}z} = \underbrace{\left(R' + \mathrm{j}\omega L'\right)\left(G' + \mathrm{j}\omega C'\right)}_{=:\gamma^2}\underline{U}(z) = \gamma^2\underline{U}(z) \\ \frac{\mathrm{d}^2\underline{I}(z)}{\mathrm{d}z^2} &= -\left(G' + \mathrm{j}\omega C'\right)\frac{\mathrm{d}\underline{U}(z)}{\mathrm{d}z} = \left(G' + \mathrm{j}\omega C'\right)\left(R' + \mathrm{j}\omega L'\right)\underline{I}(z) = \gamma^2\underline{I}(z) \end{aligned}$$

mit der als Ausbreitungsparameter bezeichneten Konstante $\underline{\gamma = \sqrt{(R' + \mathrm{j}\omega L')(G' + \mathrm{j}\omega C')}}$.

Die Lösungen dieser entkoppelten Differentialgleichungen lauten zunächst allgemein

$$\underline{U}(z) = \underline{U}^{+}\mathrm{e}^{-\gamma z} + \underline{U}^{-}\mathrm{e}^{\gamma z} \qquad\qquad \underline{I}(z) = \underline{I}^{+}\mathrm{e}^{-\gamma z} + \underline{I}^{-}\mathrm{e}^{\gamma z}$$

mit den noch unbekannten Integrationskonstanten $\underline{U}^{+}$ und $\underline{U}^{-}$ bzw. $\underline{I}^{+}$ und $\underline{I}^{-}$, welche die Amplituden von hin- und rücklaufender, d.h. sich in positiver oder negativer z-Richtung bewegender Welle repräsentieren. Hierbei gilt

$$\begin{aligned}
\underline{I}(z) &= -\frac{1}{R' + \mathrm{j}\omega L'}\frac{\mathrm{d}\underline{U}(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{\gamma}{R' + \mathrm{j}\omega L'}\left(-\underline{U}^{+}\mathrm{e}^{-\gamma z} + \underline{U}^{-}\mathrm{e}^{\gamma z}\right) \\
&= \underbrace{\sqrt{\frac{G' + \mathrm{j}\omega C'}{R' + \mathrm{j}\omega L'}}}_{=:\frac{1}{Z_\mathrm{W}}}\left(\underline{U}^{+}\mathrm{e}^{-\gamma z} - \underline{U}^{-}\mathrm{e}^{\gamma z}\right) = \frac{\underline{U}^{+}\mathrm{e}^{-\gamma z} - \underline{U}^{-}\mathrm{e}^{\gamma z}}{Z_\mathrm{W}}
\end{aligned}$$

und stellt Z_W den Wellenwiderstand der Leitung dar. Gegenüber den *primären Leitungsparametern* R', G', C' und L' nennt man γ und Z_W auch die *sekundären Leitungsparameter*. Aus den Bedingungen für Spannung und Strom am Eingang der Leitung bei $z = 0$

$$\underline{U}(0) = \underline{U}_\mathrm{e} = \underline{U}^{+} + \underline{U}^{-} \qquad\qquad \underline{I}(0) = \underline{I}_\mathrm{e} = \frac{1}{Z_\mathrm{W}}\left(\underline{U}^{+} - \underline{U}^{-}\right)$$

bestimmen sich die gesuchten Konstanten $\underline{U}^{+}$ und $\underline{U}^{-}$ zu

$$\underline{U}^{+} = \frac{1}{2}\Big[\underline{U}_\mathrm{e} + Z_\mathrm{W}\underline{I}_\mathrm{e}\Big] \qquad\qquad \underline{U}^{-} = \frac{1}{2}\Big[\underline{U}_\mathrm{e} - Z_\mathrm{W}\underline{I}_\mathrm{e}\Big]$$

Betrachtet man ein Leiterstück der Länge L, so ist weiterhin am Leitungsende bei $z = L$

$$\begin{aligned}
\underline{U}(L) = \underline{U}_\mathrm{a} &= \underline{U}^{+}\mathrm{e}^{-\gamma L} + \underline{U}^{-}\mathrm{e}^{\gamma L} = \frac{1}{2}\Big[\underline{U}_\mathrm{e} + Z_\mathrm{W}\underline{I}_\mathrm{e}\Big]\mathrm{e}^{-\gamma L} + \frac{1}{2}\Big[\underline{U}_\mathrm{e} - Z_\mathrm{W}\underline{I}_\mathrm{e}\Big]\mathrm{e}^{\gamma L} \\
&= \frac{\underline{U}_\mathrm{e}}{2}\Big(\mathrm{e}^{\gamma L} + \mathrm{e}^{-\gamma L}\Big) - \frac{Z_\mathrm{W}\underline{I}_\mathrm{e}}{2}\Big(\mathrm{e}^{\gamma L} - \mathrm{e}^{-\gamma L}\Big) = \underline{U}_\mathrm{e}\cosh(\gamma L) - Z_\mathrm{W}\underline{I}_\mathrm{e}\sinh(\gamma L) \\
\underline{I}(L) = \underline{I}_\mathrm{a} &= \frac{1}{Z_\mathrm{W}}\Big(\underline{U}^{+}\mathrm{e}^{-\gamma L} - \underline{U}^{-}\mathrm{e}^{\gamma L}\Big) = \frac{1}{Z_\mathrm{W}}\left(\frac{1}{2}\Big[\underline{U}_\mathrm{e} + Z_\mathrm{W}\underline{I}_\mathrm{e}\Big]\mathrm{e}^{-\gamma L} - \frac{1}{2}\Big[\underline{U}_\mathrm{e} - Z_\mathrm{W}\underline{I}_\mathrm{e}\Big]\mathrm{e}^{\gamma L}\right) \\
&= -\frac{\underline{U}_\mathrm{e}}{2Z_\mathrm{W}}\Big(\mathrm{e}^{\gamma L} - \mathrm{e}^{-\gamma L}\Big) + \frac{\underline{I}_\mathrm{e}}{2}\Big(\mathrm{e}^{\gamma L} + \mathrm{e}^{-\gamma L}\Big) = -\frac{\underline{U}_\mathrm{e}}{Z_\mathrm{W}}\sinh(\gamma L) + \underline{I}_\mathrm{e}\cosh(\gamma L)
\end{aligned}$$

und es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, welches in Matrixform geschrieben werden kann als

$$\begin{pmatrix}\underline{U}_\mathrm{a} \\ \underline{I}_\mathrm{a}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(\gamma L) & -Z_\mathrm{W}\sinh(\gamma L) \\ -\frac{1}{Z_\mathrm{W}}\sinh(\gamma L) & \cosh(\gamma L)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{U}_\mathrm{e} \\ \underline{I}_\mathrm{e}\end{pmatrix}$$

bzw. das umgestellt lautet

$$\begin{pmatrix}\underline{U}_\mathrm{e} \\ \underline{I}_\mathrm{e}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(\gamma L) & Z_\mathrm{W}\sinh(\gamma L) \\ \frac{1}{Z_\mathrm{W}}\sinh(\gamma L) & \cosh(\gamma L)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{U}_\mathrm{a} \\ \underline{I}_\mathrm{a}\end{pmatrix}$$

Mithilfe dieser Relationen können nun Spannung und Strom entlang des Leiterstückes beschrieben und z.B. die Impedanz am Eingang oder Abschluss der Leitung berechnet werden.

16.2 Eingangsimpedanz und Reflexionsfaktor der verlustlosen Zweidrahtleitung

Aufbauend auf den Ergebnissen von Aufgabe 16.1 lassen sich die Eingangsimpedanz und der Reflexionsfaktor einer verlustlosen Zweidrahtleitung berechnen, die an ihrem Ende mit verschiedenen Abschlusswiderständen versehen ist. Aus den Gleichungen für Spannung und Strom am Ein- und Ausgang eines Leiterstückes der Länge l bestimmt sich zunächst die Eingangsimpedanz der Leitung zu

$$Z_\mathrm{e} = \frac{\underline{U}_\mathrm{e}}{\underline{I}_\mathrm{e}} = \frac{\cosh(\gamma l)\underline{U}_\mathrm{a} + Z_\mathrm{W}\sinh(\gamma l)\underline{I}_\mathrm{a}}{\frac{1}{Z_\mathrm{W}}\sinh(\gamma l)\underline{U}_\mathrm{a} + \cosh(\gamma l)\underline{I}_\mathrm{a}} = \frac{\underline{U}_\mathrm{a} + Z_\mathrm{W}\tanh(\gamma l)\underline{I}_\mathrm{a}}{\frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{Z_\mathrm{W}}\tanh(\gamma l) + \underline{I}_\mathrm{a}}$$

sowie die Ausgangs- bzw. Abschlussimpedanz analog als

$$Z_\mathrm{a} = \frac{U_\mathrm{a}}{I_\mathrm{a}} = \frac{\cosh(\gamma l)\underline{U}_\mathrm{e} - Z_\mathrm{W}\sinh(\gamma l)\underline{I}_\mathrm{e}}{-\frac{1}{Z_\mathrm{W}}\sinh(\gamma l)\underline{U}_\mathrm{e} + \cosh(\gamma l)\underline{I}_\mathrm{e}} = \frac{\underline{U}_\mathrm{e} - Z_\mathrm{W}\tanh(\gamma l)\underline{I}_\mathrm{e}}{-\frac{\underline{U}_\mathrm{e}}{Z_\mathrm{W}}\tanh(\gamma l) + \underline{I}_\mathrm{e}}$$

Drückt man die Eingangs- mithilfe der Abschlussimpedanz aus, wird hieraus schließlich

$$Z_\mathrm{e} = \frac{\frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{I}_\mathrm{a}} + Z_\mathrm{W}\tanh(\gamma l)}{\frac{\underline{U}_\mathrm{a}}{\underline{I}_\mathrm{a}}\frac{1}{Z_\mathrm{W}}\tanh(\gamma l) + 1} = \frac{Z_\mathrm{a} + Z_\mathrm{W}\tanh(\gamma l)}{1 + \frac{Z_\mathrm{a}}{Z_\mathrm{W}}\tanh(\gamma l)} = \underline{Z_\mathrm{a}\frac{1 + \frac{Z_\mathrm{W}}{Z_\mathrm{a}}\tanh(\gamma l)}{1 + \frac{Z_\mathrm{a}}{Z_\mathrm{W}}\tanh(\gamma l)}}$$

Gegenüber der verlustbehafteten Leitung können nun Widerstands- und Leitwertbelag vernachlässigt werden und der Ausbreitungsparameter γ ist rein imaginär

$$\gamma = \sqrt{(R' + \mathrm{j}\omega L')(G' + \mathrm{j}\omega C')} \overset{R'=G'=0}{=} \mathrm{j}\omega\sqrt{L'C'} = \alpha + \mathrm{j}\beta \qquad \text{mit} \qquad \alpha = 0\ ,\ \beta = \omega\sqrt{L'C'}$$

wodurch sich die auftretenden Hyperbelfunktionen gemäß

$$\sinh(\gamma l) = \mathrm{j}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta l} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l}}{2\mathrm{j}} = \mathrm{j}\sin(\beta l) \qquad \text{und} \qquad \cosh(\gamma l) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta l} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta l}}{2} = \cos(\beta l)$$

durch trigonometrische ausdrücken lassen. Für die sich entlang der Zweidrahtleitung ausbildende elektromagnetische Welle kann nun noch der Reflexionsfaktor $r(z)$ aus dem Verhältnis von rücklaufender zu hinlaufender Welle wie folgt definiert werden

$$\underline{U}(z) = \underline{U}^+\mathrm{e}^{-\gamma z} + \underline{U}^-\mathrm{e}^{\gamma z} = \underline{U}^+\mathrm{e}^{-\gamma z}\Big(1 + \underbrace{\frac{\underline{U}^-}{\underline{U}^+}\mathrm{e}^{2\gamma z}}_{=:r(z)}\Big)$$

Mit den zuvor bestimmten Konstanten lautet dieser also

$$r(z) = \frac{\underline{U}^-}{\underline{U}^+}\mathrm{e}^{2\gamma z} = \frac{\underline{U}_\mathrm{e} - Z_\mathrm{W}\underline{I}_\mathrm{e}}{\underline{U}_\mathrm{e} + Z_\mathrm{W}\underline{I}_\mathrm{e}}\mathrm{e}^{2\gamma z} = \frac{\frac{\underline{U}_\mathrm{e}}{\underline{I}_\mathrm{e}} - Z_\mathrm{W}}{\frac{\underline{U}_\mathrm{e}}{\underline{I}_\mathrm{e}} + Z_\mathrm{W}}\mathrm{e}^{2\gamma z} = \underbrace{\frac{Z_\mathrm{e} - Z_\mathrm{W}}{Z_\mathrm{e} + Z_\mathrm{W}}}_{=:r(0)}\mathrm{e}^{2\gamma z} = r(0)\mathrm{e}^{2\gamma z}$$

Formuliert man den Reflexionsfaktor über die Leitungsimpedanz $Z(z)$, ergibt sich schließlich die Form

$$\begin{aligned} Z(z) &= \frac{\underline{U}(z)}{\underline{I}(z)} = \frac{\underline{U}^+\mathrm{e}^{-\gamma z} + \underline{U}^-\mathrm{e}^{\gamma z}}{\frac{1}{Z_\mathrm{W}}(\underline{U}^+\mathrm{e}^{-\gamma z} - \underline{U}^-\mathrm{e}^{\gamma z})} = Z_\mathrm{W}\frac{1 + \frac{\underline{U}^-}{\underline{U}^+}\mathrm{e}^{2\gamma z}}{1 - \frac{\underline{U}^-}{\underline{U}^+}\mathrm{e}^{2\gamma z}} = Z_\mathrm{W}\frac{1 + r(z)}{1 - r(z)} \\ \Rightarrow \qquad r(z) &= \underline{\frac{Z(z) - Z_\mathrm{W}}{Z(z) + Z_\mathrm{W}}} \qquad \curvearrowright \qquad \underline{r(0) = \frac{Z_\mathrm{e} - Z_\mathrm{W}}{Z_\mathrm{e} + Z_\mathrm{W}}} \quad , \quad \underline{r(l) = \frac{Z_\mathrm{a} - Z_\mathrm{W}}{Z_\mathrm{a} + Z_\mathrm{W}}} \end{aligned}$$

- Im Falle des an die Leitung angepassten, reflexionsfreien Abschlusses muss gelten

$$r(l) = \frac{Z_\mathrm{a} - Z_\mathrm{W}}{Z_\mathrm{a} + Z_\mathrm{W}} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{Z_\mathrm{a} = Z_\mathrm{W}}$$

  d.h. es dürfen keine Reflexionen am Leitungsende auftreten, wozu diese mit einem Widerstand Z_a in der Größe ihres Wellenwiderstandes abzuschließen ist. Folglich ist die Impedanz am Eingang

$$Z_\mathrm{e} = Z_\mathrm{a} \frac{1 + \mathrm{j}\frac{Z_\mathrm{W}}{Z_\mathrm{a}} \tan(\beta l)}{1 + \mathrm{j}\frac{Z_\mathrm{a}}{Z_\mathrm{W}} \tan(\beta l)} \stackrel{Z_\mathrm{a}=Z_\mathrm{W}}{=} Z_\mathrm{W} \frac{1 + \mathrm{j}\tan(\beta l)}{1 + \mathrm{j}\tan(\beta l)} = Z_\mathrm{W}$$

  und der Eingangs-Reflexionsfaktor entsprechend

$$r(0) = \frac{Z_\mathrm{e} - Z_\mathrm{W}}{Z_\mathrm{e} + Z_\mathrm{W}} \stackrel{Z_\mathrm{e}=Z_\mathrm{W}}{=} 0$$

- Schließt man die Leitung an ihrem Ende kurz, also ist $Z_\mathrm{a} = 0$, so ergibt sich eine Eingangsimpedanz von

$$Z_\mathrm{e} = \frac{Z_\mathrm{a} + \mathrm{j}Z_\mathrm{W}\tan(\beta l)}{1 + \frac{Z_\mathrm{a}}{Z_\mathrm{W}}\mathrm{j}\tan(\beta l)} \stackrel{Z_\mathrm{a}=0}{=} \mathrm{j}Z_\mathrm{W}\tan(\beta l)$$

  und die beiden Reflexionsfaktoren zu

$$\begin{aligned} r(0) &= \frac{Z_\mathrm{e} - Z_\mathrm{W}}{Z_\mathrm{e} + Z_\mathrm{W}} = \frac{\mathrm{j}\tan(\beta l) - 1}{\mathrm{j}\tan(\beta l) + 1} \\ r(l) &= \frac{Z_\mathrm{a} - Z_\mathrm{W}}{Z_\mathrm{a} + Z_\mathrm{W}} \stackrel{Z_\mathrm{a}=0}{=} -1 \end{aligned}$$

- Lässt man das Leitungsende hingegen offen ($Z_\mathrm{a} \to \infty$), folgt für die Eingangsimpedanz

$$Z_\mathrm{e} = \lim_{Z_\mathrm{a}\to\infty} \frac{1 + \mathrm{j}\frac{Z_\mathrm{W}}{Z_\mathrm{a}} \tan(\beta l)}{\frac{1}{Z_\mathrm{a}} + \mathrm{j}\frac{1}{Z_\mathrm{W}} \tan(\beta l)} = \frac{Z_\mathrm{W}}{\mathrm{j}\tan(\beta l)} = -\mathrm{j}Z_\mathrm{W}\cot(\beta l) = \mathrm{j}Z_\mathrm{W}\tan\left(\beta l - \frac{\pi}{2}\right)$$

  Die Reflexionsfaktoren am Eingang und Leitungsabschluss lauten demnach

$$\begin{aligned} r(0) &= \frac{Z_\mathrm{e} - Z_\mathrm{W}}{Z_\mathrm{e} + Z_\mathrm{W}} = \frac{-\mathrm{j}\cot(\beta l) - 1}{-\mathrm{j}\cot(\beta l) + 1} = \frac{\mathrm{j}\tan\left(\beta l - \frac{\pi}{2}\right) - 1}{\mathrm{j}\tan\left(\beta l - \frac{\pi}{2}\right) + 1} \\ r(l) &= \lim_{Z_\mathrm{a}\to\infty} \frac{1 - \frac{Z_\mathrm{W}}{Z_\mathrm{a}}}{1 + \frac{Z_\mathrm{W}}{Z_\mathrm{a}}} = 1 \end{aligned}$$

Hieraus wird ersichtlich, dass bei einer Zweidrahtleitung, die zur Datenübertragung genutzt werden soll, stets auf einen angepassten Leitungsabschluss zu achten ist, da es ansonsten zu unerwünschten Reflexionen und damit zu Störungen bzw. Informationsverfälschungen kommen kann.

16.3 Reflexionsfaktor einer induktiv abgeschlossenen Zweidrahtleitung

Für eine Leitung mit Wellenwiderstand $Z_\mathrm{W} = 50\ \Omega$, die von einem Generator mit einer harmonischen Spannung der Frequenz $f = 1$ MHz gespeist wird und die mit der Induktivität $L = \frac{50}{2\pi}\ \mu\mathrm{H}$ abgeschlossen ist, berechnet sich der Reflexionsfaktor am Leitungsende ganz analog zur vorangegangenen Aufgabe.

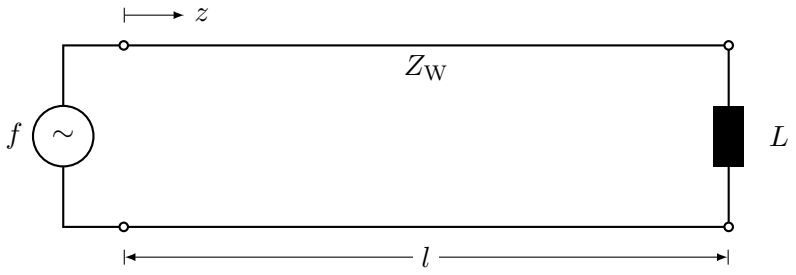


Abbildung 16.2: Zweidrahtleitung mit induktivem Abschluss

Der Abschlusswiderstand beträgt im vorliegenden Fall

$$Z_\mathrm{a} = R + \mathrm{j}\omega L \overset{R \ll L}{=} \mathrm{j}2\pi f L = \mathrm{j}2\pi \cdot 10^6 \frac{50 \cdot 10^{-6}}{2\pi}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{As}} = 50\mathrm{j}\ \Omega$$

Mit dem Ergebnis aus Aufgabe 16.2 folgt für den Reflexionsfaktor am Abschluss bei $z = l$

$$\begin{aligned} r(l) &= \frac{Z_\mathrm{a} - Z_\mathrm{W}}{Z_\mathrm{a} + Z_\mathrm{W}} = \frac{\frac{Z_\mathrm{a}}{Z_\mathrm{W}} - 1}{\frac{Z_\mathrm{a}}{Z_\mathrm{W}} + 1} = \frac{\mathrm{j} - 1}{\mathrm{j} + 1} = \frac{(\mathrm{j}-1)^2}{\mathrm{j}^2 - 1} = \underline{\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}} \\ \Rightarrow \qquad \mathrm{Re}\left\{r(l)\right\} &= 0 \quad , \quad \mathrm{Im}\left\{r(l)\right\} = 1 \end{aligned}$$

Betrag und Phase des komplexen Reflexionsfaktors sind also

$$\underline{\mathrm{abs}\left\{r(l)\right\} = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\right| = 1} \qquad \underline{\varphi = \arg\left\{r(l)\right\} = \frac{\pi}{2}}$$

Dies entspricht dem Ergebnis einer offenen Zweidrahtleitung mit dem Unterschied, dass durch die Induktivität zusätzliche eine Phasenverschiebung um 90° hervorgerufen wird.

16.4 Verlustlose Leitung mit Parallelwiderstand

Betrachtet wird die in Abbildung 16.3 dargestellte verlustlose Zweidrahtleitung. Diese besitzt die Länge $l = 2,5\,\mathrm{m}$ und den Wellenwiderstand $Z_\mathrm{W} = 200\,\Omega$ und ist am Leitungsende mit einem Widerstand von $R_\mathrm{a} = 100\,\Omega$ abgeschlossen sowie in ihrer Mitte mit dem Parallelwiderstand $R_\mathrm{P} = 100\,\Omega$ versehen.

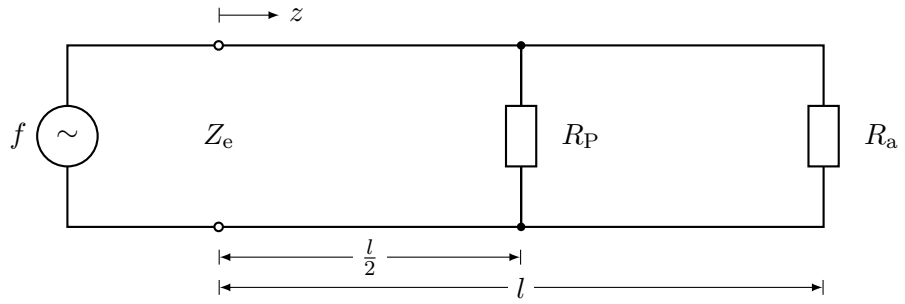


Abbildung 16.3: Zweidrahtleitung mit mittig eingefügtem Parallelwiderstand R_P

Über die gegebene Ausbreitungsgeschwindigkeit von $v_c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bei $f = 60\,\mathrm{MHz}$ Betriebsfrequenz berechnet sich zunächst der Ausbreitungsparameter γ mithilfe der Beziehung $v_\mathrm{P} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$. Wie in Aufgabe 16.2 ist dieser bei verlustlosen Leitungen rein imaginär und es gilt

$$\gamma = \mathrm{j}\beta \qquad \text{mit} \qquad \beta = \omega\sqrt{L'C'} = \frac{\omega}{v_\mathrm{P}} = \frac{2\pi f}{v_c} = 2\pi\frac{60 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8}\,\frac{1}{\mathrm{m}} = \underline{\frac{\pi}{2,5}\,\mathrm{m}^{-1}}$$

Zur Ermittlung der Eingangsimpedanz am Leitungsanfang wird nun in einem ersten Schritt die Impedanz Z'_e der hinteren Leitungshälfte an der Stelle des Parallelwiderstandes bestimmt, d.h. der Abschlusswiderstand R_a vom Leitungsende in die Mitte transformiert:

$$Z'_\mathrm{e} = R_\mathrm{a}\frac{1 + \mathrm{j}\frac{Z_\mathrm{W}}{R_\mathrm{a}}\tan\left(\beta\frac{l}{2}\right)}{1 + \mathrm{j}\frac{R_\mathrm{a}}{Z_\mathrm{W}}\tan\left(\beta\frac{l}{2}\right)} = R_\mathrm{a}\frac{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \mathrm{j}\frac{Z_\mathrm{W}}{R_\mathrm{a}}}{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \mathrm{j}\frac{R_\mathrm{a}}{Z_\mathrm{W}}} = R_\mathrm{a}\left(\frac{Z_\mathrm{W}}{R_\mathrm{a}}\right)^2 = \frac{Z_\mathrm{W}^2}{R_\mathrm{a}} = 400\,\Omega$$

Der Ersatzwiderstand in der Mitte der Leitung beträgt somit $R'_\mathrm{a} = R_\mathrm{P} \parallel Z'_\mathrm{e} = 80\,\Omega$ und stellt den Abschlusswiderstand der vorderen Leitungshälfte dar. Dieser wird im nächsten Schritt schließlich an den Anfang transformiert, um die gesuchte Eingangsimpedanz zu erhalten. Man berechnet analog

$$Z_\mathrm{e} = R'_\mathrm{a}\frac{1 + \mathrm{j}\frac{Z_\mathrm{W}}{R'_\mathrm{a}}\tan\left(\beta\frac{l}{2}\right)}{1 + \mathrm{j}\frac{R'_\mathrm{a}}{Z_\mathrm{W}}\tan\left(\beta\frac{l}{2}\right)} = R'_\mathrm{a}\frac{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \mathrm{j}\frac{Z_\mathrm{W}}{R'_\mathrm{a}}}{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \mathrm{j}\frac{R'_\mathrm{a}}{Z_\mathrm{W}}} = R'_\mathrm{a}\left(\frac{Z_\mathrm{W}}{R'_\mathrm{a}}\right)^2 = \frac{Z_\mathrm{W}^2}{R'_\mathrm{a}} = \underline{500\,\Omega}$$

Für den Fall ohne Parallelwiderstand hingegen lässt sich der Abschlusswiderstand R_a ohne weiteren Zwischenschritt über die gesamte Leitungslänge l an den Anfang transformieren. Es ist dann

$$Z_\mathrm{e} = R_\mathrm{a}\frac{1 + \mathrm{j}\frac{Z_\mathrm{W}}{R_\mathrm{a}}\tan(\beta l)}{1 + \mathrm{j}\frac{R_\mathrm{a}}{Z_\mathrm{W}}\tan(\beta l)} = R_\mathrm{a}\frac{1 + \mathrm{j}\frac{Z_\mathrm{W}}{R_\mathrm{a}}\tan(\pi)}{1 + \mathrm{j}\frac{R_\mathrm{a}}{Z_\mathrm{W}}\tan(\pi)} = \underline{R_\mathrm{a} = 100\,\Omega}$$

16.5 Wellenwiderstand einer verlustlosen Zweidrahtleitung

Eine Zweidrahtleitung bestehe aus zwei parallelen, ideal leitenden Drähten vom Radius R im gegenseitigen Abstand $a = \mathrm{e}^{\pi} R$, welche in Richtung der z-Achse verlaufen (Abbildung 16.4). Für die Berechnung des Wellenwiderstandes Z_{W} dieser Anordnung gilt im Falle verlustloser Leiter mit $R' = G' = 0$

$$Z_{\mathrm{W}} = \sqrt{\frac{R' + \mathrm{j}\omega L'}{G' + \mathrm{j}\omega C'}} \overset{R'=G'=0}{=} \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Es müssen also zunächst der Induktivitätsbelag L' und Kapazitätsbelag C' bestimmt werden, deren Definitionsgleichung sich bei der Herleitung der Telegraphengleichungen ergibt. Man betrachtet daher allgemein eine TEM-Welle mit harmonischer Zeitabhängigkeit, die sich entlang der Leitung fortbewegt und deren Feldkomponenten in Ausbreitungsrichtung verschwinden.

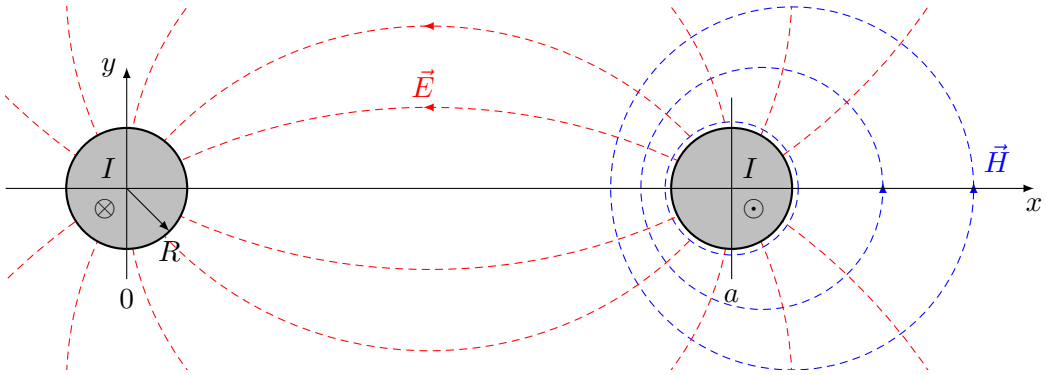


Abbildung 16.4: Querschnitt der Zweidrahtleitung aus parallelen Drähten mit Radius R im Abstand a

Die Rotation des elektrischen und magnetischen Feldes vereinfacht sich somit und es lässt sich schreiben

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\underline{\vec{E}} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underline{E}_x & \underline{E}_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z}\vec{e}_x + \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z}\vec{e}_y + \left(\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z \\
\curvearrowright \qquad \left(\mathrm{rot}\,\underline{\vec{E}}\right) \times \vec{e}_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\underline{E}_x\vec{e}_x + \underline{E}_y\vec{e}_y\right] = \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial z} \\
\textit{analog:} \qquad \left(\mathrm{rot}\,\underline{\vec{H}}\right) \times \vec{e}_z &= \frac{\partial \underline{\vec{H}}}{\partial z}
\end{aligned}$$

Da innerhalb eines Querschnittes der Leitung $z = \text{const.}$ ist und damit auch die Ableitungen nach z zu Null werden, folgt wegen

$$\mathrm{rot}\,\underline{\vec{E}} = \left(\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z \qquad \rightarrow \qquad \left(\mathrm{rot}\,\underline{\vec{E}}\right)\vec{e}_x = \left(\mathrm{rot}\,\underline{\vec{E}}\right)\vec{e}_y = 0$$

die Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes in allen Transversalebenen und man kann dieses durch den Gradienten des Skalarpotentials Φ über den Ansatz

$$\underline{\vec{E}}(x, y, z) = -\,\mathrm{grad}\,\Phi(x, y) \cdot g(z)$$

ausdrücken. Die Variation des Feldes in Ausbreitungsrichtung wird dabei mit der zusätzlichen Funktion $g(z)$ in Form eines Produktansatzes berücksichtigt. In das Gausssche Gesetz $\mathrm{div}\,\vec{D} = \varrho_{\mathrm{V}} = 0$ der Maxwell-Gleichungen eingesetzt, erhält man

$$\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}} = -\underbrace{\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,\Phi(x, y)\right)}_{=\triangle\,\Phi(x,y)} \cdot g(z = \text{const.}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \triangle\,\Phi(x, y) = 0$$

Das Skalarpotential innerhalb der Transversalebene lässt sich somit über die obige LAPLACE-Gleichung bestimmen. Aus dem Induktions- und dem Durchflutungsgesetz folgt weiterhin

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\underline{\vec{E}} + \mathrm{j}\omega\mu\underline{\vec{H}} &= 0 \quad \xrightarrow{\times\vec{e}_z} \quad \left(\operatorname{rot}\underline{\vec{E}}\right)\times\vec{e}_z + \mathrm{j}\omega\mu\underline{\vec{H}}\times\vec{e}_z = \frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial z} + \mathrm{j}\omega\mu\underline{\vec{H}}\times\vec{e}_z = 0 \\
\operatorname{rot}\underline{\vec{H}} - \mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{\vec{E}} &= 0 \quad \xrightarrow{\times\vec{e}_z} \quad \left(\operatorname{rot}\underline{\vec{H}}\right)\times\vec{e}_z - \mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{\vec{E}}\times\vec{e}_z = \underline{\frac{\partial\vec{H}}{\partial z} - \mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{\vec{E}}\times\vec{e}_z = 0}
\end{aligned}$$

Ein erneutes Bilden des Kreuzproduktes mit $\vec{e}_z$ und Anwenden der *bac-cab*-Regel liefert

$$\begin{aligned}
0 &= \vec{e}_z\times\left(\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial z} + \mathrm{j}\omega\mu\underline{\vec{H}}\times\vec{e}_z\right) = \vec{e}_z\times\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial z} + \mathrm{j}\omega\mu\vec{e}_z\times\left(\underline{\vec{H}}\times\vec{e}_z\right) = \vec{e}_z\times\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial z} + \mathrm{j}\omega\mu\underline{\vec{H}} \\
\underline{\vec{H}} &= -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\left[\vec{e}_z\times\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial z}\right] = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\left[\vec{e}_z\times\frac{\partial}{\partial z}\Big(\operatorname{grad}\Phi(x,y)g(z)\Big)\right] = \underline{\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\left[\vec{e}_z\times\operatorname{grad}\Phi(x,y)\frac{\partial g(z)}{\partial z}\right]}
\end{aligned}$$

Damit sind also Ausdrücke für das elektrische Feld zwischen den bzw. das magnetische Feld um die Leiter gefunden und können die Beziehungen von Spannung und Strom der Zweidrahtleitung aufgestellt werden. Die Leiterspannung bestimmt sich aus dem Linienintegral des elektrischen Feldes entlang des Weges C von einer Leiteroberfläche zur anderen, wie Abbildung 16.5 illustriert.

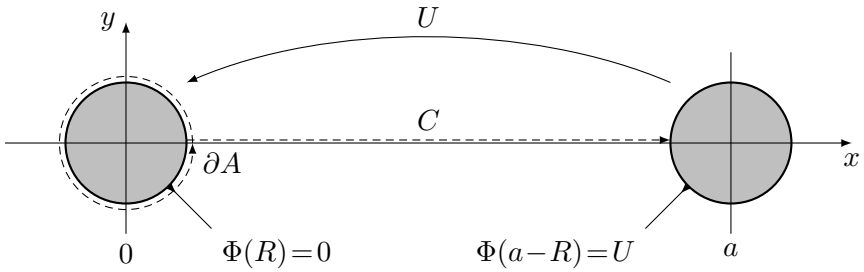


Abbildung 16.5: Festlegung der Potentiale und Wahl der Integrationswege

Man formt das Induktionsgesetz nach Integration entsprechend weiter um und erhält

$$\int_C\left(\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial z} + \mathrm{j}\omega\mu\underline{\vec{H}}\times\vec{e}_z\right)\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial}{\partial z}\underbrace{\int_C\underline{\vec{E}}\mathrm{d}\vec{r}}_{=\underline{U}} + \mathrm{j}\omega\mu\int_C\left(\underline{\vec{H}}\times\vec{e}_z\right)\mathrm{d}\vec{r} = \underline{\frac{\partial\underline{U}}{\partial z} + \frac{\partial g(z)}{\partial z}\int_C\operatorname{grad}\Phi\mathrm{d}\vec{r} = 0}$$

Die Relation des Stromes, der sich über das Wegintegral des magnetischen Feldes entlang der Berandung ∂A eines Leiters gemäß

$$\underline{I} = \oint_{\partial A}\underline{\vec{H}}\mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\oint_{\partial A}\left(\vec{e}_z\times\operatorname{grad}\Phi\frac{\partial g(z)}{\partial z}\right)\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial g(z)}{\partial z}\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\oint_{\partial A}\left(\vec{e}_z\times\operatorname{grad}\Phi\right)\mathrm{d}\vec{r}$$

ermitteln lässt, stellt man nach der Ableitung $\frac{\partial g(z)}{\partial z}$ um und setzt diese in die vorige Gleichung ein. Mit

$$\frac{\partial g(z)}{\partial z} = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\oint_{\partial A}\left(\vec{e}_z\times\operatorname{grad}\Phi\right)\mathrm{d}\vec{r}}\cdot\underline{I}$$

führt dies auf die erste Telegraphengleichung

$$\underline{\frac{\partial\underline{U}}{\partial z} + \mathrm{j}\omega\underbrace{\mu\frac{\int_C\operatorname{grad}\Phi\mathrm{d}\vec{r}}{\oint_{\partial A}\left(\vec{e}_z\times\operatorname{grad}\Phi\right)\mathrm{d}\vec{r}}}_{=:L'}\underline{I} = 0}$$

in dem L' als der Induktivitätsbelag definiert ist.

Analog verfährt man mit dem Durchflutungsgesetz zur Herleitung der zweiten Telegraphengleichung

$$\oint_{\partial A}\left(\frac{\partial\vec{\underline{H}}}{\partial z}-\mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{\underline{E}}\times\vec{e}_z\right)\mathrm{d}\vec{r}=\frac{\partial}{\partial z}\underbrace{\oint_{\partial A}\vec{\underline{H}}\mathrm{d}\vec{r}}_{=\underline{I}}-\mathrm{j}\omega\varepsilon\oint_{\partial A}\left(\vec{\underline{E}}\times\vec{e}_z\right)\mathrm{d}\vec{r}=\underline{\frac{\partial\underline{I}}{\partial z}+g(z)\mathrm{j}\omega\varepsilon\oint_{\partial A}(\operatorname{grad}\Phi\times\vec{e}_z)\,\mathrm{d}\vec{r}=0}$$

wobei mit

$$\underline{U}=\int_C\vec{\underline{E}}\mathrm{d}\vec{r}=-g(z)\int_C\operatorname{grad}\Phi\mathrm{d}\vec{r}\qquad\Rightarrow\qquad g(z)=-\frac{\underline{U}}{\int_C\operatorname{grad}\Phi\mathrm{d}\vec{r}}$$

schließlich folgt

$$\underline{\frac{\partial\underline{I}}{\partial z}+\mathrm{j}\omega\underbrace{\varepsilon\frac{\oint_{\partial A}(\vec{e}_z\times\operatorname{grad}\Phi)\,\mathrm{d}\vec{r}}{\int_C\operatorname{grad}\Phi\mathrm{d}\vec{r}}}_{=:C'}\underline{U}=0}$$

und in dem C' den Kapazitätsbelag der Leitung bezeichnet. Für die Bestimmung des Potentials der konkreten Leiteranordnung ist die Nutzung von Zylinderkoordinaten sinnvoll, sodass sich die LAPLACE-Gleichung gemäß

$$\triangle\,\Phi(\varrho)=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Phi(\varrho)}{\partial\varrho}\right)+\frac{1}{\varrho^2}\underbrace{\frac{\partial^2\Phi(\varrho)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi(\varrho)}{\partial z^2}}_{=0}=0$$

formuliert. Durch Integration erhält man hieraus

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Phi(\varrho)}{\partial\varrho}\right)&=0\\ \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Phi(\varrho)}{\partial\varrho}\right)&=0 &&\Big|\int\mathrm{d}\varrho\ ,\ /\varrho\\ \frac{\partial\Phi(\varrho)}{\partial\varrho}&=\frac{C_1}{\varrho} &&\Big|\int\mathrm{d}\varrho\\ \Phi(\varrho)&=C_1\ln\varrho+C_2\end{aligned}$$

Die Konstanten werden aus den Randbedingungen des Potentials auf der Oberfläche der beiden Leiter bei $\varrho=R$ und $\varrho=a-R$ bestimmt, wobei eines der Potentiale als Bezugspotential mit $\Phi=0$ definiert und das andere mit $\Phi=\underline{U}$ festgelegt wird. Es ist demnach

$$\begin{aligned}\Phi(R)\overset{!}{=}0&=C_1\ln R+C_2\qquad\rightarrow\qquad C_2=-C_1\ln R\\ \Phi(a-R)\overset{!}{=}\underline{U}&=C_1\ln(a-R)+C_2=C_1\Big[\ln(a-R)-\ln R\Big]=C_1\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)\\ &\Rightarrow\quad C_1=\frac{\underline{U}}{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}\qquad\qquad C_2=-\frac{\underline{U}\ln R}{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}\end{aligned}$$

und das Potential zwischen beiden Leitern lautet

$$\underline{\Phi(\varrho)=\underline{U}\frac{\ln\varrho-\ln R}{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}=\underline{U}\frac{\ln\left(\frac{\varrho}{R}\right)}{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}}$$

Dementsprechend berechnet man dessen Gradienten und die gesuchten Ausdrücke zu

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\Phi(\varrho) &= \frac{\partial\Phi(\varrho)}{\partial\varrho}\vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho}\underbrace{\frac{\partial\Phi(\varrho)}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi(\varrho)}{\partial z}\vec{e}_z}_{=0} = \frac{\partial\Phi(\varrho)}{\partial\varrho}\vec{e}_\varrho \\
\operatorname{grad}\Phi(\varrho) &= \frac{\underline{U}}{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}\frac{\partial}{\partial\varrho}\ln\left(\frac{\varrho}{R}\right)\vec{e}_\varrho = \frac{\underline{U}}{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}\frac{\vec{e}_\varrho}{\varrho} \\
\int\limits_C \operatorname{grad}\Phi(\varrho)\mathrm{d}\vec{r} &= \int\limits_R^{a-R}\operatorname{grad}\Phi(\varrho)\mathrm{d}\varrho\vec{e}_\varrho = \frac{\underline{U}}{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}\int\limits_R^{a-R}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = \frac{\underline{U}}{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}\ln\left(\frac{a-R}{R}\right) = \underline{U} \\
\oint\limits_{\partial A}\Big(\vec{e}_z\times\operatorname{grad}\Phi(\varrho)\Big)\mathrm{d}\vec{r} &= \int\limits_0^{2\pi}\Big(\vec{e}_z\times\operatorname{grad}\Phi(R)\Big)R\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi = \frac{\underline{U}}{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi\underline{U}}{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}
\end{aligned}$$

womit für den Induktivitäts- und Kapazitätsbelag folgt

$$\begin{aligned}
L' &= \mu\frac{\int_C\operatorname{grad}\Phi\mathrm{d}\vec{r}}{\oint_{\partial A}\left(\vec{e}_z\times\operatorname{grad}\Phi\right)\mathrm{d}\vec{r}} = \mu\frac{\underline{U}}{\frac{2\pi\underline{U}}{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}} = \underline{\mu\frac{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}{2\pi}} \\
C' &= \varepsilon\frac{\oint_{\partial A}\left(\vec{e}_z\times\operatorname{grad}\Phi\right)\mathrm{d}\vec{r}}{\int_C\operatorname{grad}\Phi\mathrm{d}\vec{r}} = \varepsilon\frac{\frac{2\pi\underline{U}}{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}}{\underline{U}} = \underline{\varepsilon\frac{2\pi}{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}}
\end{aligned}$$

Der Wellenwiderstand der Leitung beträgt also

$$Z_\mathrm{W} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \left[\frac{\mu\frac{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}{2\pi}}{\varepsilon\frac{2\pi}{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\ln\left(\frac{a-R}{R}\right)}{2\pi} \overset{R\ll a}{\approx} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\ln\left(\frac{a}{R}\right)}{2\pi} \overset{a=\mathrm{e}^\pi R}{=} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^\pi\right)}{2\pi} = \underline{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$$

16.6 Wellenwiderstand einer verlustlosen Koaxialleitung

Für die mit Luft (Permeabilität μ_0, Permittivität ε_0) gefüllte, verlustlose Koaxialleitung, deren Kapazitätsbelag mit $C' = \frac{500}{9}\ \frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}}$ bekannt ist, wird eine Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen von

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_\mathrm{r}\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}} \overset{\mu_\mathrm{r}=\varepsilon_\mathrm{r}=1}{=} \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c = 3\cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

angenommen. Aufgrund der als ideal leitfähig angesehenen Leitermaterialien gilt wegen $R' = G' = 0$ für den Ausbreitungsparameter

$$\gamma = \sqrt{(R' + \mathrm{j}\omega L')(G' + \mathrm{j}\omega C')} \overset{R'=G'=0}{=} \mathrm{j}\omega\sqrt{L'C'} = \mathrm{j}\beta \qquad \text{mit} \qquad \beta = \omega\sqrt{L'C'} = \frac{\omega}{v_\mathrm{P}}$$

Über die Beziehung zur Ausbreitungsgeschwindigkeit bestimmt sich zunächst der Induktivitätsbelag

$$v_\mathrm{P} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = v_c \qquad \Rightarrow \qquad L' = \frac{1}{v_c^2 C'} = \frac{10^{-6}}{5}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} = \underline{0{,}2\ \frac{\mu\mathrm{H}}{\mathrm{m}}}$$

womit man nun den Wellenwiderstand zu

$$Z_\mathrm{W} = \sqrt{\frac{R' + \mathrm{j}\omega L'}{G' + \mathrm{j}\omega C'}} \overset{R'=G'=0}{=} \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{9}{25}\cdot 10^4}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \underline{60\ \Omega}$$

berechnet. Mit einem verlustfreien Dielektrikum der Dielektrizitätszahl $\varepsilon_\mathrm{r} = 4$ anstelle von Luft verringert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit auf

$$v_c' = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}}} = \frac{v_c}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}} = \underline{\frac{v_c}{2} = 1{,}5\cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

und es ergibt sich ein geänderter Kapazitätsbelag C'^* des Koaxialkabels von

$$v_c' = \frac{1}{\sqrt{L'C'^*}} \qquad \Rightarrow \qquad C'^* = \frac{1}{v_c'^2 L'} = \frac{2}{9}\cdot 10^{-9}\ \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} = \underline{\frac{2}{9}\ \frac{\mathrm{nF}}{\mathrm{m}}}$$

Somit beträgt der Wellenwiderstand in diesem Fall

$$Z_\mathrm{W} = \sqrt{\frac{L'}{C'^*}} = \sqrt{9\cdot 10^2}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \underline{30\ \Omega}$$

A Formelsammlung

Koordinatensysteme und Koordinatentransformation

Eine Übersicht der Orts- und Basisvektoren, der metrischen Faktoren sowie der Weg-, Flächen- und Volumenelemente in kartesischen, Zylinder- und Kugelkoordinaten findet sich auf Seite 115.

Eine Darstellung der Basisvektoren des Zylinder- oder Kugelkoordinatensystems durch die kartesischen Basisvektoren ist mit den Transformationsmatrizen $\mathbf{T}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{z}}$ bzw. $\mathbf{T}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{s}}$ möglich. Die Rücktransformation erfolgt dann jeweils durch Anwendung der inversen Matrix:

$$\mathbf{T}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{z}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \vec{e}_\varrho \\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{z}} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{s}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta & \cos\vartheta \\ \cos\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\vartheta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{s}} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

Differentialoperatoren und wichtige Identitäten

Schreibweise der Vektordifferentialoperatoren Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace mithilfe des Nabla-Operators $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Es ist $\Phi(\vec{r})$ ein Skalarfeld und $\vec{F}(\vec{r})$ ein Vektorfeld.

$$\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \operatorname{grad}\Phi(\vec{r}) \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{div}\vec{F}(\vec{r}) \qquad \vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}) \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \triangle\,\Phi(\vec{r})$$

Eine explizite Darstellung der Vektordifferentialoperatoren in kartesischen, Zylinder- und Kugelkoordinaten findet sich in der Tabelle auf Seite 115.

Seien c eine skalare Konstante, Φ bzw. Φ_i Skalarfelder und $\vec{F}$ bzw. $\vec{F}_i$ Vektorfelder ($i = 1, 2$). Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(c\Phi) &= c\operatorname{grad}\Phi & \operatorname{div}\left(c\vec{F}\right) &= c\operatorname{div}\vec{F} \\ \operatorname{grad}(\Phi_1+\Phi_2) &= \operatorname{grad}\Phi_1 + \operatorname{grad}\Phi_2 & \operatorname{div}\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right) &= \operatorname{div}\vec{F}_1 + \operatorname{div}\vec{F}_2 \\ \operatorname{grad}(\Phi_1\cdot\Phi_2) &= \Phi_2\operatorname{grad}\Phi_1 + \Phi_1\operatorname{grad}\Phi_2 & \operatorname{div}\left(\Phi\vec{F}\right) &= \operatorname{grad}\Phi\cdot\vec{F} + \Phi\operatorname{div}\vec{F} \\ & & \operatorname{div}\left(\vec{F}_1\times\vec{F}_2\right) &= \vec{F}_2\operatorname{rot}\vec{F}_1 - \vec{F}_1\operatorname{rot}\vec{F}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\left(c\vec{F}\right) &= c\operatorname{rot}\vec{F} \\ \operatorname{rot}\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right) &= \operatorname{rot}\vec{F}_1 + \operatorname{rot}\vec{F}_2 \\ \operatorname{rot}\left(\Phi\vec{F}\right) &= \operatorname{grad}\Phi\times\vec{F} + \Phi\operatorname{rot}\vec{F} \\ \operatorname{rot}\left(\vec{F}_1\times\vec{F}_2\right) &= \left(\vec{F}_2\vec{\nabla}\right)\vec{F}_1 - \left(\vec{F}_1\vec{\nabla}\right)\vec{F}_2 + \vec{F}_1\left(\operatorname{div}\vec{F}_2\right) - \vec{F}_2\left(\operatorname{div}\vec{F}_1\right) \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\Phi) = \triangle\,\Phi \qquad \operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right) = 0$$

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right) = \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{F}\right) - \triangle\,\vec{F} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\Phi) = \vec{0}$$

Bei Anwendung der Vektordifferentialoperatoren auf den Ortsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ mit $|\vec{r}| = r$ gilt

$$\operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r} \qquad \operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \operatorname{div}\vec{r} = 3 \qquad \operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \qquad \operatorname{rot}\vec{r} = \vec{0}$$

Koordinatensystem	**kartesisch**	**zylindersymmetrisch**	**kugelsymmetrisch**
Koordinaten u_i	$x \quad y \quad z$	$\varrho \quad \varphi \quad z$	$r \quad \vartheta \quad \varphi$
Ortsvektor $\vec{r}$	$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$	$\varrho\cos\varphi\vec{e}_x + \varrho\sin\varphi\vec{e}_y + z\vec{e}_z$	$r\cos\varphi\sin\vartheta\vec{e}_x + r\sin\varphi\sin\vartheta\vec{e}_y + r\cos\vartheta\vec{e}_z$
Metrische Faktoren $h_i = \left\lvert \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i} \right\rvert$	$h_x = 1 \quad h_y = 1 \quad h_z = 1$	$h_\varrho = 1 \quad h_\varphi = \varrho \quad h_z = 1$	$h_r = 1 \quad h_\vartheta = r \quad h_\varphi = r\sin\vartheta$
Basisvektoren $\vec{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}$	$\vec{e}_x \quad \vec{e}_y \quad \vec{e}_z$	$\vec{e}_\varrho \quad \vec{e}_\varphi \quad \vec{e}_z$	$\vec{e}_r \quad \vec{e}_\vartheta \quad \vec{e}_\varphi$
Wegelement $\mathrm{d}\vec{r} = \sum_i \mathrm{d}u_i h_i \vec{e}_i$	$\mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z$	$\mathrm{d}\varrho\vec{e}_\varrho + \varrho\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi + \mathrm{d}z\vec{e}_z$	$\mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\vartheta\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$
Flächenelemente $\mathrm{d}\vec{A}_i = \vec{e}_i \prod_{j\neq i} \mathrm{d}u_j h_j$	$\mathrm{d}\vec{A}_x = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{e}_x$ $\mathrm{d}\vec{A}_y = \mathrm{d}x\mathrm{d}z\vec{e}_y$ $\mathrm{d}\vec{A}_z = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{e}_z$	$\mathrm{d}\vec{A}_\varrho = \varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\vec{e}_\varrho$ $\mathrm{d}\vec{A}_\varphi = \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}z\vec{e}_\varphi$ $\mathrm{d}\vec{A}_z = \varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho\vec{e}_z$	$\mathrm{d}\vec{A}_r = r^2\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta\vec{e}_r$ $\mathrm{d}\vec{A}_\vartheta = r\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\vec{e}_\vartheta$ $\mathrm{d}\vec{A}_\varphi = r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}r\vec{e}_\varphi$
Volumenelement $\mathrm{d}V = \prod_i h_i \mathrm{d}u_i$	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	$\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}z$	$r^2\sin\vartheta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta$
Gradient $\operatorname{grad}\Phi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$	$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z$	$\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}\vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z$	$\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$
Divergenz $\operatorname{div}\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r})$	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho F_\varrho)}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta F_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$
Rotation $\operatorname{rot}\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r})$	$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x$ $+ \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y$ $+ \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$	$\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\varrho$ $+ \left(\frac{\partial F_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\varrho}\right)\vec{e}_\varphi$ $+ \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho F_\varphi)}{\partial\varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial F_\varrho}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z$	$\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial(\sin\vartheta F_\varphi)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r$ $+ \left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\vartheta$ $+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\vartheta}\right)\vec{e}_\varphi$
LAPLACE-Operator $\triangle\Phi(\vec{r})$	$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$

Tabelle A.1

Integralsatz von Gauß und Stokes

Für ein Vektorfeld $\vec{F}$ gilt der GAUSSsche bzw. STOKESsche Integralsatz wie folgt

$$\begin{aligned} \text{GAUSS} \quad & \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \mathrm{d}V = \oiint_{\partial V} \vec{F} \mathrm{d}\vec{A} \\ \text{STOKES} \quad & \iint_A \operatorname{rot} \vec{F} \mathrm{d}\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} \end{aligned}$$

Hierin ist V ein beliebig wählbares Volumen und ∂V dessen Oberfläche sowie A eine beliebig wählbare Fläche und ∂A deren Rand.

Häufig verwendete Integrale

$$\int \frac{x \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}^3} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}^3} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \vec{e}_\varrho \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y\right) \mathrm{d}\varphi = \vec{0} \qquad \int_0^{\pi} \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta = 2$$

Maxwell-Gleichungen, Materialgleichungen und Kontinuitätsgleichung

Die MAXWELL-Gleichungen lauten in Differential- bzw. Integralform

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \varrho_\mathrm{V} & \oiint_{\partial V} \vec{D} \mathrm{d}\vec{A} &= \iiint_V \varrho_\mathrm{V} \mathrm{d}V = Q \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \oiint_{\partial V} \vec{B} \mathrm{d}\vec{A} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \oint_{\partial A} \vec{E} \mathrm{d}\vec{r} &= -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \mathrm{d}\vec{A} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \oint_{\partial A} \vec{H} \mathrm{d}\vec{r} &= \iint_A \vec{J} \mathrm{d}\vec{A} + \iint_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \mathrm{d}\vec{A} \end{aligned}$$

Materialgleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_0 \mu_\mathrm{r} \vec{H} \qquad \vec{J} = \kappa \vec{E}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{J} \mathrm{d}V + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \varrho_\mathrm{V} \mathrm{d}V = \oiint_{\partial V} \vec{J} \mathrm{d}\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} Q = 0$$

Stetigkeitsbedingungen der Felder an Grenzflächen

$$\begin{aligned} D_2^\mathrm{n} - D_1^\mathrm{n} &= \varrho_\mathrm{F} & H_2^\mathrm{t} - H_1^\mathrm{t} &= J_\mathrm{F} \\ E_2^\mathrm{t} - E_1^\mathrm{t} &= 0 & B_2^\mathrm{n} - B_1^\mathrm{n} &= 0 \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen die Indizes n und t die Normal- bzw. Tangentialkomponente. Es ist ϱ_F die Flächenladungsdichte und J_F die Flächenstromdichte innerhalb der Grenzschicht.

Elektrostatik

COULOMB-Kraft der Punktladung Q' bzw. der Ladungsverteilung $\varrho_\mathrm{V}(\vec{r}')$ auf Q (mit Beobachtungspunkt $\vec{r}$ und Quellpunkt $\vec{r}'$)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{QQ'}{4\pi\varepsilon}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \qquad \vec{F}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\iiint \varrho_\mathrm{V}(\vec{r}')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}V'$$

Elektrostatisches Potential einer Ladungsverteilung $\varrho_\mathrm{V}(\vec{r}')$, POISSON-Gleichung des Skalarpotentials und Zusammenhang zwischen Potential und elektrostatischem Feld

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint \frac{\varrho_\mathrm{V}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V' \qquad \triangle\,\Phi(\vec{r}) = -\frac{\varrho_\mathrm{V}(\vec{r}')}{\varepsilon} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\vec{r})$$

Definition der elektrischen Spannung

$$U_{21} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r}$$

Kraft und Kraftdichte einer Ladung Q bzw. Ladungsverteilung ϱ_V im elektrostatischen Feld

$$\vec{F}_\mathrm{e}(\vec{r}) = Q\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}W_\mathrm{e} \qquad \vec{f}_\mathrm{e}(\vec{r}) = \varrho_\mathrm{V}(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}w_\mathrm{e}$$

Elektrostatische Energie und Energiedichte sowie Arbeit

$$W_\mathrm{e}(\vec{r}) = Q\Phi(\vec{r}) \qquad w_\mathrm{e}(\vec{r}) = \varrho_\mathrm{V}(\vec{r})\Phi(\vec{r}) \qquad \Delta W = Q\left[\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)\right] = QU_{21}$$

Potential und elektrisches Feld eines Dipols mit Dipolmoment $\vec{p} = q\vec{a}$

$$\Phi_\mathrm{D}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}\vec{p}}{r^3} \qquad \vec{E}_\mathrm{D}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[3\frac{(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right]$$

Potential von N Dipolen $\vec{p}_j$ am Ort $\vec{r}_j$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{j=1}^{N}\frac{\vec{p}_j(\vec{r}-\vec{r}_j)}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{j=1}^{N}\vec{p}_j\operatorname{grad}_r\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}\right)$$

Potential und gesamtes Dipolmoment einer kontinuierlichen Dipoldichte $\vec{m}(\vec{r}')$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint \frac{\vec{m}(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}V' \qquad \vec{p} = \iiint \vec{m}(\vec{r}')\mathrm{d}V'$$

Kraft, Drehmoment und potentielle Energie eines Dipols im elektrostatischen Feld

$$\vec{F}_\mathrm{D} = \operatorname{grad}\left(\vec{p}\vec{E}\right) \qquad \vec{M}_\mathrm{D} = \vec{p}\times\vec{E} \qquad W_\mathrm{D}(\vec{r}) = -\vec{p}\vec{E}$$

Durch ein elektrisches Feld $\vec{E}$ influenzierte Flächenladungsdichte (Fläche mit Normalenvektor $\vec{n}$)

$$\varrho_\mathrm{F} = \varepsilon\vec{E}\vec{n} = -\varepsilon\operatorname{grad}\Phi\vec{n} = -\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}}$$

Abstand d' zum Kugelmittelpunkt und Größe q der Spiegelladung bei Spiegelung der Ladung Q am Ort d an einer leitenden Kugel vom Radius R

$$d' = \frac{R^2}{d} \qquad q = -Q\frac{R}{d}$$

Kapazität eines Kondensators mit Ladung Q und Potentialdifferenz $U = \Delta\Phi$ zwischen den Elektroden sowie die im Dielektikum der Permittivität $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}$ gespeicherte elektrostatische Energie

$$C = \frac{Q}{U} \qquad W_\mathrm{e} = \iiint_V w_\mathrm{e}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{E}\vec{D}\mathrm{d}V = \frac{\varepsilon}{2}\iiint_V E^2\mathrm{d}V$$

Elektrisches Strömungsfeld

Definition der Stromdichte $\vec{J}$ einer Raumladung der Ladungsdichte ϱ_V mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bzw. als Strom I in einem Leiter der Querschnittsfläche A. Nach dem OHMschen Gesetz wird die Stromdichte über die Leitfähigkeit κ mit dem elektrischen Feld $\vec{E}$ verknüpft

$$\vec{J} = \varrho_\mathrm{V}\vec{v} = \kappa\vec{E} \qquad\qquad I = \iint\limits_A \vec{J}\mathrm{d}\vec{A}$$

Kontinuitätsgleichung (Gesetz von der Erhaltung der Ladung). Das stationäre Strömungsfeld ist quellfrei mit $\frac{\partial\varrho_\mathrm{V}}{\partial t} = 0$ und es folgt der KIRCHHOFFsche Knotensatz

$$\operatorname{div}\vec{J} = -\frac{\partial\varrho_\mathrm{V}}{\partial t} \qquad\qquad \operatorname{div}\vec{J} = 0 \quad\Rightarrow\quad \oiint\limits_{\partial V}\vec{J}\mathrm{d}\vec{A} = 0$$

OHMscher Widerstand eines dünnen Leiters mit Länge l, Querschnittsfläche A und Leitfähigkeit κ sowie Verlustleistungsdichte und im Leiter umgesetzte Verlustleistung (JOULEsches Gesetz)

$$R = \frac{1}{\kappa}\frac{l}{A} \qquad\qquad p_\mathrm{V} = \frac{1}{\kappa}\vec{J}^2 = \vec{E}\vec{J} \qquad\qquad P_\mathrm{V} = RI^2 = UI$$

Magnetostatik

Zusammenhang zwischen magnetischer Flussdichte $\vec{B}$ und magnetischem Vektorpotential $\vec{A}$ sowie COULOMB- und LORENZ-Eichung des Vektorpotentials

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) \qquad\qquad \operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) = 0 \qquad\qquad \operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) + \varepsilon\mu\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial t} = 0$$

POISSON-Gleichung des Vektorpotentials und ihre allgemeine Lösung

$$\triangle\vec{A}(\vec{r}) = -\mu\vec{J}(\vec{r}) \qquad\qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V' = \frac{\mu}{4\pi}\oint\limits_C \frac{I(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}\vec{r}'$$

Von der Stromdichte $\vec{J}$ hervorgerufenes magnetisches Feld $\vec{H}$ sowie speziell für einen sehr langen, in z-Richtung ausgedehnten und den Strom I führenden Linienleiter im axialen Abstand ϱ

$$\oint\limits_{\partial A}\vec{H}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_A \vec{J}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{A} \qquad\qquad 2\pi\varrho H(\varrho) = I$$

BIOT-SAVART-Gesetz zur Berechnung des Magnetfeldes $\vec{H}(\vec{r})$, das vom Strom I bzw. der Stromdichte $\vec{J}$ innerhalb einer durch den Quellpunktvektor $\vec{r}'$ beschriebenen Leiteranordnung hervorgerufenen wird

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \vec{J}(\vec{r}')\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}V' = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_C \frac{I(\vec{r}')\mathrm{d}\vec{r}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Magnetischer Fluss durch eine Fläche A sowie in einer Leiterschleife induzierte Spannung

$$\Phi_\mathrm{m} = \iint\limits_A \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} \qquad\qquad u_\mathrm{ind} = \oint\limits_{\partial A}\vec{E}\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\partial\Phi_A}{\partial t}$$

Magnetische Energie W_m und Energiedichte w_m

$$W_\mathrm{m} = \iiint\limits_V w_\mathrm{m}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \vec{H}\vec{B}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \vec{A}\vec{J}\mathrm{d}V = \frac{1}{2\mu}\iiint\limits_V B^2\mathrm{d}V$$

Definition der Gegeninduktivität und Berechnung für eine Leiteranordnung mit den Quellpunktvektoren $\vec{r}'_{1/2}$ nach der NEUMANNschen Formel

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} \qquad M_{21} = M_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \oint\limits_{C_2} \oint\limits_{C_1} \frac{\mathrm{d}\vec{r}'_1 \mathrm{d}\vec{r}'_2}{|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1|}$$

(Selbst)Induktivität einer vom Strom I durchflossenen Leiteranordnung sowie im Feld gespeicherte magnetische Energie

$$L = \frac{\Phi_\mathrm{m}}{I} = \frac{1}{I} \oint\limits_C \vec{A}\mathrm{d}\vec{r} \qquad W_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \vec{A}\vec{J}\mathrm{d}V = \frac{I}{2} \oint\limits_C \vec{A}\mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{2} L I^2$$

Magneto-Quasistatik

Diffusionsgleichung des magnetischen Vektorpotentials in allgemeiner und komplexwertiger Formulierung (gilt analog für die Feldgrößen $\vec{E}$, $\vec{J}$, $\vec{H}$ und $\vec{B}$) mit der Diffusionskonstante $\alpha := \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu\kappa} = \frac{1+\mathrm{j}}{\delta}$

$$\triangle \vec{A}(\vec{r}) = \mu\kappa \frac{\partial \vec{A}(\vec{r})}{\partial t} \qquad \triangle \underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \underbrace{\mathrm{j}\omega\mu\kappa}_{=\alpha^2} \underline{\vec{A}}(\vec{r}) \qquad \text{mit} \qquad \underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

Allgemeine Lösung der eindimensionalen Diffusionsgleichung für spezielle Problemstellungen mit den aus Nebenbedingungen zu bestimmenden Integrationskonstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$

kartesisch ($\kappa = 0$)	$\frac{\partial^2 \underline{A}(x)}{\partial x^2} = 0$		$\underline{A}(x) = C_1 x + C_2$
kartesisch ($\kappa \neq 0$)	$\frac{\partial^2 \underline{A}(x)}{\partial x^2} - \alpha^2 \underline{A}(x) = 0$		$\underline{A}(x) = C_1 \sinh(\alpha x) + C_2 \cosh(\alpha x)$
zylindersymmetrisch	$\frac{\partial^2 \underline{A}(\varrho)}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \underline{A}(\varrho)}{\partial \varrho} - \alpha^2 \underline{A}(\varrho) = 0$		$\underline{A}(\varrho) = C_1 I_0(\alpha\varrho) + C_2 K_0(\alpha\varrho)$

Im zylindersymmetrischen Fall sind I_0 und K_0 die modifizierten BESSEL-Funktionen nullter Ordnung. Für diese gelten folgende Beziehungen

$$\frac{\partial I_0(\alpha\varrho)}{\partial \varrho} = \alpha I_1(\alpha\varrho) \qquad I_0(0) = 1 \qquad I_n(0) = 0 \quad \forall n \geq 1 \qquad \lim_{\varrho\to\infty} I_n(\varrho) = \infty \quad \forall n$$

$$\frac{\partial K_0(\alpha\varrho)}{\partial \varrho} = -\alpha K_1(\alpha\varrho) \qquad \lim_{\varrho\to 0} K_n(\varrho) = \infty \quad \forall n \qquad \lim_{\varrho\to\infty} K_n(\varrho) = 0 \quad \forall n$$

Definition der charakteristischen Länge (auch als Eindringtiefe bzw. Skin-Tiefe bezeichnet)

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}}$$

Beliebig veränderliche Felder, Erhaltungssätze

Definition der lokalen Leistungsflussdichte bzw. des POYNTING-Vektors

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \qquad \text{bzw. im Komplexen} \qquad \underline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*$$

POYNTINGscher Satz in Differential- und Integralform sowie in komplexer Formulierung

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{S} &= -\vec{E}\vec{J} - \frac{\partial}{\partial t}\Big(w_\mathrm{e} + w_\mathrm{m}\Big) = -\vec{E}\vec{J} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B}\right) \\
\oiint\limits_{\partial V} \vec{S}\mathrm{d}\vec{A} &= -\iiint\limits_{V} \vec{E}\vec{J}\mathrm{d}V - \frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{V}\Big(w_\mathrm{e} + w_\mathrm{m}\Big)\mathrm{d}V \\
\operatorname{div} \underline{\vec{S}} &= -\frac{1}{2}\underline{\vec{E}}\,\underline{\vec{J}}^* - 2\mathrm{j}\omega\left[\frac{1}{4}\underline{\vec{H}}\,\underline{\vec{B}}^* - \frac{1}{4}\underline{\vec{E}}\,\underline{\vec{D}}^*\right] = -\langle p_\mathrm{V}\rangle - 2\mathrm{j}\omega(\langle w_\mathrm{m}\rangle - \langle w_\mathrm{e}\rangle) \\
\oiint\limits_{\partial V} \underline{\vec{S}}\mathrm{d}\vec{A} &= -\iiint\limits_{V}\langle p_\mathrm{V}\rangle\mathrm{d}V - 2\mathrm{j}\omega\iiint\limits_{V}(\langle w_\mathrm{m}\rangle - \langle w_\mathrm{e}\rangle)\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

Definition des MAXWELLschen Spannungstensors (Einheitsmatrix $\mathbb{1}$, dyadisches Produkt $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{a}\vec{b}^\mathrm{T}$)

$$\mathbf{T} = \varepsilon\left[\vec{E} \circ \vec{E} - \frac{1}{2}\mathbb{1}\vec{E}^2\right] + \frac{1}{\mu}\left[\vec{B} \circ \vec{B} - \frac{1}{2}\mathbb{1}\vec{B}^2\right]$$

Kraftdichte und Gesamtkraft auf eine Ladungsverteilung

$$\vec{f} = \operatorname{div}\mathbf{T} - \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{S} \qquad\qquad \vec{F} = \oiint\limits_{\partial V}\mathbf{T}\mathrm{d}\vec{A} - \frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{V}\varepsilon\mu\vec{S}\mathrm{d}V$$

Elektromagnetische Wellen

Inhomogene Wellengleichung für das elektrische und das magnetische Feld

$$\begin{aligned}
\triangle\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} &= \operatorname{grad}\left(\frac{\varrho_\mathrm{V}}{\varepsilon}\right) - \mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} \\
\triangle\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} &= -\operatorname{rot}\vec{J}
\end{aligned}$$

Phasengeschwindigkeit und Wellenwiderstand ebener Wellen in einem Medium mit Brechungsindex n

$$v_\mathrm{P} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n} \qquad Z_\mathrm{W} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{1}{v_\mathrm{P}\varepsilon} = v_\mathrm{P}\mu \qquad \text{mit} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \quad \text{und} \quad n = \sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\mu_\mathrm{r}}$$

Definition der Wellenzahl bzw. des Wellenzahlvektors

$$k = |\vec{k}| = \frac{\omega}{v_\mathrm{P}} = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Zusammenhang zwischen Ausbreitungsgeschwindigkeit, Wellenlänge und Frequenz bzw. Periodendauer

$$v_\mathrm{P} = \lambda\, f \qquad\qquad \text{mit} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Beziehung zwischen elektrischem und magnetischem Feld sowie dem Wellenzahlvektor

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \times \vec{E}\right) \qquad \vec{H} = \frac{1}{Z_\mathrm{W}}\left(\vec{e}_k \times \vec{E}\right) \qquad \vec{E} = \frac{\omega}{k^2}\left(\vec{B} \times \vec{k}\right) = Z_\mathrm{W}\left(\vec{H} \times \vec{e}_k\right)$$

Darstellung eines Wellenpaketes als gewichtete Überlagerung von Teilwellen unterschiedlicher Wellenzahlvektoren mit beliebiger Wichtungsfunktion $W(k)$

$$\Psi(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)}\mathrm{d}k$$

Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpaketes, dessen Wichtungsfunktion um eine bestimmte Wellenzahl k_0 herum verteilt ist

$$v_\mathrm{G} = \left.\frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_0}$$

Reflexion und Brechung

Reflexionsgesetz und (SNELLIUSsches) Brechungsgesetz einer unter dem Winkel ϑ_1 auf eine Grenzfläche auftreffenden Welle

$$\vartheta_1 = \vartheta_{1\mathrm{r}} \qquad\qquad \frac{n_2}{n_1} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_2}$$

Reflexions- und Transmissionskoeffizient bei senkrechter sowie bei paralleler Polarisation (FRESNELsche Beziehungen)

$$r_\perp = \frac{Z_2\cos\vartheta_1 - Z_1\cos\vartheta_2}{Z_2\cos\vartheta_1 + Z_1\cos\vartheta_2} \qquad t_\perp = \frac{2Z_2\cos\vartheta_1}{Z_2\cos\vartheta_1 + Z_1\cos\vartheta_2} = 1 + r_\perp$$

$$r_\parallel = \frac{Z_2\cos\vartheta_2 - Z_1\cos\vartheta_1}{Z_2\cos\vartheta_2 + Z_1\cos\vartheta_1} \qquad t_\parallel = \frac{2Z_2\cos\vartheta_1}{Z_2\cos\vartheta_2 + Z_1\cos\vartheta_1} = \frac{\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_2}(1 + r_\parallel)$$

Erzeugung elektromagnetischer Felder

Retardiertes Skalar- und Vektorpotential

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\varrho_\mathrm{V}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v_c}\right)\mathrm{d}V' \\ \vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v_c}\right)\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

Retardiertes Vektorpotential bei harmonischer Zeitabhängigkeit

$$\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\underline{\vec{J}}(\vec{r}')\mathrm{d}V'$$

Nahfeld- und Fernfeld-Näherung bei Betrachtung eines räumlich begrenzten Quellgebietes der Ausdehnung d am Beobachtungspunkt im Abstand $r = |\vec{r}|$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \begin{cases} 1 & \text{für} \quad d \ll r \ll \lambda \quad \text{(Nahfeld)} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} & \text{für} \quad d \ll \lambda \ll r \quad \text{(Fernfeld)} \end{cases}$$

Direktivität (Richtcharakteristik) einer Antenne, d.h. Normierung der mittleren räumlichen Energieflussdichte S_r auf die Abstrahlung eines isotropen Strahlers äquivalenter Abstrahlleistung $\langle P_\mathrm{a}\rangle$

$$D(\vartheta,\varphi) = \frac{S_r(\vartheta,\varphi)}{\frac{\langle P_\mathrm{a}\rangle}{4\pi r^2}} \qquad \text{mit} \quad \langle P_\mathrm{a}\rangle = \oiint_{A_\mathrm{Kugel}} \langle\vec{S}\rangle\mathrm{d}\vec{A} \quad , \quad S_r(\vartheta,\varphi) = \left|\mathrm{Re}\left\{\underline{\vec{S}}\right\}\right|$$

Magnetische Feldstärke im Fernfeld einer Linearantenne mit Stromverteilung $\underline{I}(\vec{r}')$

$$\underline{\vec{H}}(\vec{r}) = \frac{\mathrm{j}k}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\int_C \underline{I}(\vec{r}')\exp\left(\mathrm{j}k\frac{\vec{r}\,\vec{r}'}{r}\right)\mathrm{d}\vec{r}' \times \frac{\vec{r}}{r}$$

Wellenleiter und Leitungstheorie

Darstellung der transversalen durch die axialen elektrischen und magnetischen Feldkomponenten innerhalb eines in z-Richtung verlaufenden Rechteckhohlleiters, wobei $\gamma = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - k^2}$ die Hohlleiter-Wellenzahl ist

$$E_x = -\frac{\mathrm{j}}{\gamma^2}\left[k\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right] \qquad E_y = -\frac{\mathrm{j}}{\gamma^2}\left[k\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right]$$
$$H_x = -\frac{\mathrm{j}}{\gamma^2}\left[k\frac{\partial H_z}{\partial x} - \omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y}\right] \qquad H_y = -\frac{\mathrm{j}}{\gamma^2}\left[k\frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x}\right]$$

Ausbreitung von Spannung und Strom innerhalb einer verlustlosen Zweidrahtleitung mit Induktivitätsbelag L' und Kapazitätsbelag C' (Telegraphengleichungen), wobei gilt $L'C' = \varepsilon\mu = \frac{1}{v_\mathrm{P}^2}$

$$\frac{\partial \underline{U}(z)}{\partial z} + \mathrm{j}\omega L'\underline{I}(z) = 0 \qquad \frac{\partial \underline{I}(z)}{\partial z} + \mathrm{j}\omega C'\underline{U}(z) = 0$$

Telegraphengleichungen einer verlustbehafteten Zweidrahtleitung mit zusätzlichem Widerstandsbelag R' und Leitwertbelag G' (R', G', L' und C' werden als primäre Leitungsparameter bezeichnet)

$$\frac{\partial \underline{U}(z)}{\partial z} + \left(R' + \mathrm{j}\omega L'\right)\underline{I}(z) = 0 \qquad \frac{\partial \underline{I}(z)}{\partial z} + \left(G' + \mathrm{j}\omega C'\right)\underline{U}(z) = 0$$

Entkoppelte Telegraphengleichungen der verlustbehafteten Zweidrahtleitung

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \underline{U}(z)}{\partial z^2} &= \left(R' + \mathrm{j}\omega L'\right)\left(G' + \mathrm{j}\omega C'\right)\underline{U}(z) = \gamma^2\underline{U}(z)\\ \frac{\partial^2 \underline{I}(z)}{\partial z^2} &= \left(R' + \mathrm{j}\omega L'\right)\left(G' + \mathrm{j}\omega C'\right)\underline{I}(z) = \gamma^2\underline{I}(z)\end{aligned}$$

Definition von Wellenwiderstand $\underline{Z}_W$ und Ausbreitungsparameter γ (sekundäre Leitungsparameter)

$$\underline{Z}_\mathrm{W} = \frac{R' + \mathrm{j}\omega L'}{\gamma} = \sqrt{\frac{R' + \mathrm{j}\omega L'}{G' + \mathrm{j}\omega C'}} \qquad \gamma = \sqrt{(R' + \mathrm{j}\omega L')(G' + \mathrm{j}\omega C')}$$

Definition von Induktivitätsbelag L' und Kapazitätsbelag C' über das Skalarpotential Φ zwischen den Leitern der Zweidrahtleitung, welches sich aus der LAPLACE-Gleichung $\triangle\,\Phi = 0$ bestimmen lässt

$$L' = \mu\frac{\int_C \operatorname{grad}\Phi\mathrm{d}\vec{r}}{\oint_{\partial A}(\vec{e}_z \times \operatorname{grad}\Phi)\,\mathrm{d}\vec{r}} \qquad C' = \varepsilon\frac{\oint_{\partial A}(\vec{e}_z \times \operatorname{grad}\Phi)\,\mathrm{d}\vec{r}}{\int_C \operatorname{grad}\Phi\mathrm{d}\vec{r}}$$

Beziehungen zwischen Spannung und Strom am Eingang bzw. Abschluss einer Leitung der Länge l

$$\begin{pmatrix}\underline{U}_\mathrm{e}\\ \underline{I}_\mathrm{e}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(\gamma l) & Z_\mathrm{W}\sinh(\gamma l)\\ \frac{1}{Z_\mathrm{W}}\sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{U}_\mathrm{a}\\ \underline{I}_\mathrm{a}\end{pmatrix}$$

Impedanztransformation der Abschlussimpedanz Z_a an den Eingang eines Leiterstückes

$$Z_\mathrm{e} = Z_\mathrm{a}\frac{1 + \frac{Z_\mathrm{W}}{Z_\mathrm{a}}\tanh(\gamma l)}{1 + \frac{Z_\mathrm{a}}{Z_\mathrm{W}}\tanh(\gamma l)}$$

Definition des Reflexionsfaktors an einer Stelle z der Zweidrahtleitung

$$r(z) = \frac{Z_\mathrm{e} - Z_\mathrm{W}}{Z_\mathrm{e} + Z_\mathrm{W}}\mathrm{e}^{2\gamma z} = \frac{Z(z) - Z_\mathrm{W}}{Z(z) + Z_\mathrm{W}}$$