1 Aufgaben zum Spannungstensor

Zur Herleitung der auf eine Ladungsverteilung der Ladungsdichte ϱ_V ausgeübten Kraft wird zunächst die im Volumenelement $\mathrm{d}V$ eingeschlossene Ladung betrachtet, auf die innerhalb eines Feldes ($\vec{E}$, $\vec{B}$) der differentielle Kraftbeitrag

$$\mathrm{d}F = \varrho_V \mathrm{d}V(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1}$$

wirkt. Die Gesamtkraft ergibt sich durch Integration über die Ladungsverteilung im Volumen V

$$\vec{F} = \iiint\limits_V \underbrace{\varrho_V(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}_{=\vec{f}} \mathrm{d}V = \iiint\limits_V \vec{f} \mathrm{d}V \tag{2}$$

wobei die Kraftdichte $\vec{f}$ unter Nutzung der MAXWELLschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \varrho_V & (3) \qquad \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & (5) \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (4) \qquad \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (6) \end{aligned}$$

weiter umgeformt werden kann. Es ist

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \varrho_V \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \overset{3,6}{=} \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + \left(\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \times \vec{B} & (7) \\ &\overset{5}{=} \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + \left(\operatorname{rot} \vec{H} \right) \times \vec{B} - \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{D} \times \vec{B} \right) - \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] + \vec{H} \underbrace{\operatorname{div} \vec{B}}_{=0} & (8) \\ &\overset{4}{=} \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{H} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{D} \times \operatorname{rot} \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{D} \times \vec{B} \right) & (9) \end{aligned}$$

Da der zusätzliche Term $\vec{H} \operatorname{div} \vec{B}$ Null ist, lässt er sich hier ohne Weiteres zur Gleichung addieren. Dies hat den Vorteil, dass nach Umordnung und Zusammenfassung ähnliche Ausdrücke für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ entstehen. Anwendung der Materialgleichungen $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu \vec{H}$ liefert

$$\vec{f} = \varepsilon \left[\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} \right] + \frac{1}{\mu} \left[\vec{B} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B} \right] - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) \tag{10}$$

Mithilfe der Identität

$$\operatorname{grad} \left(\vec{A} \cdot \vec{B} \right) = \vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{B} + \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{A} + \left(\vec{A} \operatorname{grad} \right) \vec{B} + \left(\vec{B} \operatorname{grad} \right) \vec{A} \tag{11}$$

können nun die beiden Kreuzproduktterme mit der Rotation ersetzt werden durch

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \left(\vec{E} \cdot \vec{E} \right) &= 2\vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} + 2 \left(\vec{E} \operatorname{grad} \right) \vec{E} & (12) \\ \Rightarrow \qquad -\vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} &= \left(\vec{E} \operatorname{grad} \right) \vec{E} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(\vec{E}^2 \right) \qquad \textit{(analog für } \vec{B}\textit{)} & (13) \end{aligned}$$

sodass für die Kraftdichte folgt

$$\vec{f} = \varepsilon \left[\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \left(\vec{E} \operatorname{grad} \right) \vec{E} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} \vec{E}^2 \right] + \frac{1}{\mu} \left[\vec{B} \operatorname{div} \vec{B} + \left(\vec{B} \operatorname{grad} \right) \vec{B} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} \vec{B}^2 \right] - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) \tag{14}$$

Definiert man weiterhin den MAXWELLschen Spannungstensor gemäß

$$\mathbf{T} = (\mathrm{T}_{ij}) \quad , \quad \mathrm{T}_{ij} = \varepsilon \left[E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_i^j E^2 \right] + \frac{1}{\mu}\left[B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_i^j B^2 \right] \quad \text{mit} \quad \delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{15}$$

so gilt für die j-te Komponente der Divergenz $\operatorname{div}\mathbf{T}$ ($j \in \{1,2,3\}$)

$$(\operatorname{div}\mathbf{T})_j = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathrm{T}_{ij}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \varepsilon \left[\frac{\partial E_i}{\partial x_i} E_j + E_i \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \right] + \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial B_i}{\partial x_i} B_j + B_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right] \right\} - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial x_j} - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial B^2}{\partial x_j} \tag{16}$$

$$= \varepsilon \left[E_j \operatorname{div}\vec{E} + \left(\vec{E}\operatorname{grad}\right) E_j - \frac{1}{2}\operatorname{grad}_j E^2 \right] + \frac{1}{\mu}\left[B_j \operatorname{div}\vec{B} + \left(\vec{B}\operatorname{grad}\right) B_j - \frac{1}{2}\operatorname{grad}_j B^2 \right] \tag{17}$$

und Gleichung 14 kann ausgedrückt werden als

$$\vec{f} = \operatorname{div}\mathbf{T} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \operatorname{div}\mathbf{T} - \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)}_{=\vec{S}} \tag{18}$$

mit dem POYNTING-Vektor $\vec{S}$. Bei der Bildung des Volumenintegrals zur Berechnung der Gesamtkraft entfällt schließlich die Divergenz durch Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes und man erhält

$$\boxed{\vec{F} = \iiint\limits_V \vec{f}\,\mathrm{d}V = \oiint\limits_{\partial V} \mathbf{T}\,\mathrm{d}\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \vec{S}\,\mathrm{d}V} \tag{19}$$

Letztlich lässt sich Gleichung 15 mithilfe der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ und des dyadischen Produktes $\vec{a}\circ\vec{b} = \vec{a}\vec{b}^{\mathrm{T}}$ noch in etwas vereinfachter Notation schreiben, womit die Definition des Spannungstensors die Form

$$\boxed{\mathbf{T} = \varepsilon\left[\vec{E}\circ\vec{E} - \frac{1}{2}\mathbb{1}\vec{E}^2\right] + \frac{1}{\mu}\left[\vec{B}\circ\vec{B} - \frac{1}{2}\mathbb{1}\vec{B}^2\right]} \tag{20}$$

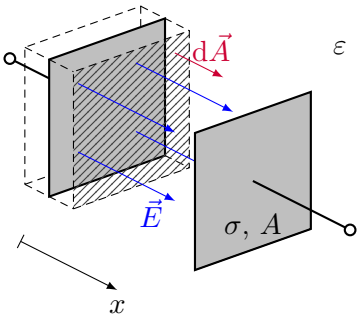
annimmt.

Aufgabe 1

Bei der Berechnung der Kraft zwischen zwei Kondensatorplatten (Fläche A, Flächenladungsdichte σ) handelt es sich um ein rein elektrostatisches Problem, weshalb die magnetische Feldstärke $\vec{H} = \vec{0}$ ist und demzufolge auch kein Beitrag vom POYNTING-Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{0}$ ausgeht. Gleichung 19 für die wirkende Gesamtkraft vereinfacht sich hierdurch und es gilt

$$\vec{F} = \oiint_{\partial V} \mathbf{T} \mathrm{d}\vec{A} - \underbrace{\varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \vec{S} \mathrm{d}V}_{=0} = \oiint_{\partial V} \mathbf{T} \mathrm{d}\vec{A}$$

Mithilfe der GAUSSschen Methode bestimmt man zunächst die elektrische Feldstärke $\vec{E} = E_x \vec{e}_x$ innerhalb des Kondensators, wobei diese nur zwischen beiden Platten wirksam ist und Randeffekte vereinfachend vernachlässigt werden. Als Volumen V wird ein Bereich gewählt, welcher eine der Platten (z.B. bei $x = 0$) vollständig umschließt und an deren Geometrie angepasst ist.



Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\iiint_V \operatorname{div} \vec{D} \mathrm{d}V = \oiint_{\partial V} \vec{D} \mathrm{d}\vec{A} &= \iiint_V \varrho_V \mathrm{d}V \\
\oiint_{\partial V} \varepsilon E_x \vec{e}_x \mathrm{d}A \vec{e}_x = \varepsilon E_x A &= \iiint_V \sigma \delta(x) \mathrm{d}V = \iint_A \sigma \mathrm{d}A = \sigma A \\
\Rightarrow \qquad \vec{E} &= \frac{\sigma}{\varepsilon} \vec{e}_x
\end{aligned}$$

Hiermit ist nun

$$\vec{E}^2 = E_x^2 \quad , \quad \vec{E} \circ \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{B} \circ \vec{B} = 0$$

und der MAXWELLsche Spannungstensor lautet

$$\mathbf{T} = \varepsilon \left[\vec{E} \circ \vec{E} - \frac{1}{2} \mathbb{1} \vec{E}^2 \right] = \varepsilon \left[\begin{pmatrix} E_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & E_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & E_x^2 \end{pmatrix} \right] = \frac{\varepsilon}{2} \begin{pmatrix} E_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E_x^2 \end{pmatrix}$$

Die Kraft zwischen beiden Kondensatorplatten berechnet sich schließlich aus dem Oberflächenintegral dieses Tensors über die geschlossene Oberfläche ∂V, wobei der Integrationsbereich V wie zuvor eine der Platten beinhaltet. Es folgt

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon}{2} \oiint_{\partial V} \begin{pmatrix} E_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{2} \iint_A \begin{pmatrix} E_x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}A = \frac{\varepsilon}{2} E_x^2 A \vec{e}_x = \underline{\frac{\sigma^2}{2\varepsilon} A \vec{e}_x}$$

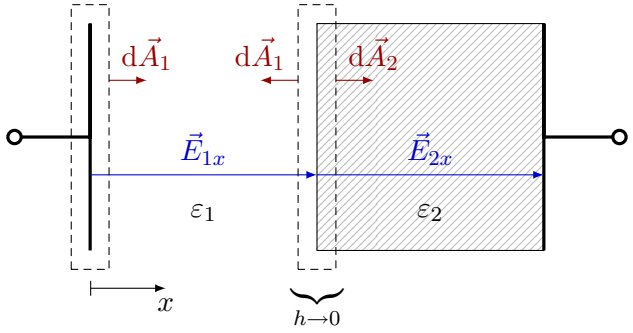
Aufgabe 2

Die Grenzflächenkräfte innerhalb des dargestellten Kondensators mit unterschiedlichen Dielektrika ε_1 und ε_2 berechnen sich ganz analog zur vorhergehenden Aufgabe. Wiederum sollen Randeffekte vernachlässigt werden und das elektrische Feld lediglich zwischen den Kondensatorplatten wirksam sein. Für die elektrischen Feldstärken in beiden Dielektrika bestimmt man

$$\vec{E}_1 = E_{1x}\vec{e}_x = \frac{Q}{\varepsilon_1 A}\vec{e}_x \qquad\qquad \vec{E}_2 = E_{2x}\vec{e}_x = \frac{Q}{\varepsilon_2 A}\vec{e}_x$$

mit der Fläche A und der Plattenladung Q. Es sind damit die Spannungstensoren in den Teilgebieten

$$\mathbf{T}_1 = \frac{\varepsilon_1}{2}\begin{pmatrix} E_{1x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E_{1x}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{1x}^2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \mathbf{T}_2 = \frac{\varepsilon_2}{2}\begin{pmatrix} E_{2x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E_{2x}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{2x}^2 \end{pmatrix}$$



(a) Für die Berechnung der Kraft auf die Trennfläche zwischen beiden Dielektrika wählt man den Integrationsbereich des Oberflächenintegrals nun derart, dass die Mediengrenzschicht vollständig umschlossen wird und die Oberflächenstücke innerhalb des Kondensators parallel zu dieser liegen. Dies könnte je nach Plattengeometrie also beispielsweise ein dünner Quader oder Zylinder mit infinitesimaler Höhe $h \to 0$ sein. In diesem Fall verschwindet der Fluss durch die Mantelfläche und es müssen nur Grund- und Deckfläche betrachtet werden.

Mit $\mathrm{d}\vec{A}_2 = \mathrm{d}A\vec{e}_x = -\mathrm{d}\vec{A}_1$ für die Oberflächenelemente folgt die Gesamtkraft damit zu

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \oiint_{\partial V} \mathbf{T}\mathrm{d}\vec{A} = \iint_{A_1} \mathbf{T}_1\mathrm{d}\vec{A}_1 + \iint_{A_2} \mathbf{T}_2\mathrm{d}\vec{A}_2 = \iint_{A} \mathbf{T}_2\mathrm{d}\vec{A} - \iint_{A} \mathbf{T}_1\mathrm{d}\vec{A} \\
&= \frac{\varepsilon_2}{2}\iint_A E_{2x}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\varepsilon_1}{2}\iint_A E_{1x}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{A}{2}\left(\varepsilon_2 E_{2x}^2 - \varepsilon_1 E_{1x}^2\right)\vec{e}_x = \frac{Q^2}{2A}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\vec{e}_x = \underline{\frac{Q^2}{2A}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\vec{e}_x}
\end{aligned}$$

(b) Auf gleiche Weise verfährt man zur Berechnung der Kräfte auf die Kondensatorplatten, wobei das Integrationsvolumen hier nun jeweils die linke bzw. rechte Platte umschließt und das Feld außerhalb des Kondensators Null ist. Wieder ist die Orientierung der Oberflächenelemente zu beachten. Es gilt $\mathrm{d}\vec{A}_1 = \mathrm{d}A\vec{e}_x = -\mathrm{d}\vec{A}_2$ und dementsprechend folgt für beide Kräfte

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= \oiint_{\partial V} \mathbf{T}\mathrm{d}\vec{A} = \iint_{A_1} \mathbf{T}_1\mathrm{d}\vec{A}_1 = \frac{\varepsilon_1}{2}\iint_A E_{1x}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \underline{\frac{\varepsilon_1 A}{2}E_{1x}^2\vec{e}_x = \frac{Q^2}{2A\varepsilon_1}\vec{e}_x} \\
\vec{F}_2 &= \ldots = \underline{-\frac{Q^2}{2A\varepsilon_2}\vec{e}_x}
\end{aligned}$$

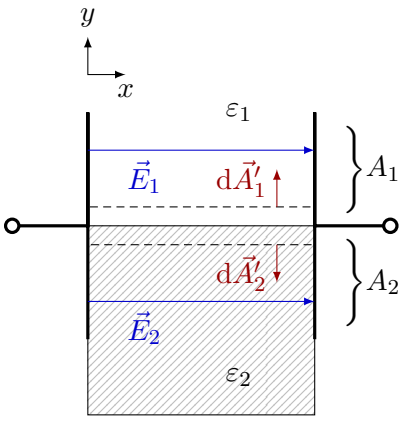
Aufgabe 3

Damit das Dielektrikum, welches den Kondensator wie dargestellt ausfüllt, in den Plattenzwischenraum hineingezogen wird, muss eine Kraft in positive y-Richtung auf die Grenzschicht zwischen beiden Medien wirken. Man bestimmt zunächst wieder die elektrischen Feldstärken in den Halbräumen, die als zwei parallel geschaltete Kondensatoren mit den Plattenflächen A_1 und A_2 sowie den Teilladungen Q_1 und Q_2 aufgefasst werden können. Aufgrund der konstanten Kondensatorspannung $U = \int \vec{E}\mathrm{d}\vec{r} = \text{const.}$ folgt die Gleichheit beider Feldstärken

$$\vec{E}_1 = \frac{Q_1}{\varepsilon_1 A_1}\vec{e}_x = \frac{Q_2}{\varepsilon_2 A_2}\vec{e}_x = \vec{E}_2 = E_x\vec{e}_x$$

und die Spannungstensoren in den Dielektrika lauten demzufolge

$$\mathbf{T}_{1/2} = \varepsilon_{1/2}\left[\vec{E}\circ\vec{E} - \frac{1}{2}\mathbb{1}\vec{E}^2\right] = \frac{\varepsilon_{1/2}}{2}\begin{pmatrix} E_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E_x^2 \end{pmatrix}$$



Als Integrationsbereich wählt man wiederum ein die Grenzfläche umschließendes Volumen infinitesimaler Höhe $h \to 0$, bei dem die Oberflächenelemente $\mathrm{d}\vec{A}_1' = \mathrm{d}A'\vec{e}_y = -\mathrm{d}\vec{A}_2'$ von Grund- und Deckfläche nun allerdings in y-Richtung orientiert sind. Hiermit berechnet sich die Gesamtkraft zu

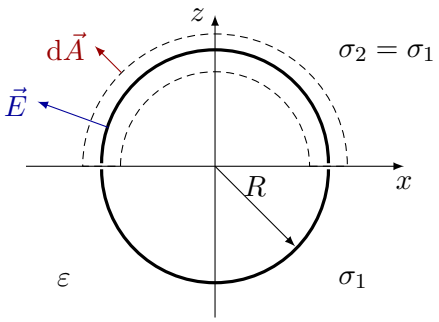
$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \oiint_{\partial V}\mathbf{T}\mathrm{d}\vec{A} = \iint_{A_1'}\mathbf{T}_1\mathrm{d}\vec{A}_1' + \iint_{A_2'}\mathbf{T}_2\mathrm{d}\vec{A}_2' = \iint_{A'}(\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2)\mathrm{d}\vec{A}' \\
&= \frac{E_x^2}{2}\iint_{A'}\left[\varepsilon_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} - \varepsilon_2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\\mathrm{d}A'\\0\end{pmatrix} \\
&= \frac{E_x^2}{2}A'\Big(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\Big)\vec{e}_y = \underbrace{\frac{Q_1^2A'}{2\varepsilon_1^2A_1^2}}_{>0}\Big(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\Big)\vec{e}_y = \underbrace{\frac{Q_2^2A'}{2\varepsilon_2^2A_1^2}}_{>0}\Big(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\Big)\vec{e}_y
\end{aligned}$$

Anhand der erhaltenen Ausdrücke für die Kraft $\vec{F}$ wird deutlich, dass diese nur dann in positive y-Richtung wirkt, wenn die Differenz der Permittivitäten $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ positiv ist, d.h. das Dielektrikum wird in den Kondensator hineingezogen, sofern die Bedingung $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ gilt.

Aufgabe 4

Für die beschriebene Hohlkugel, deren Radius R sei und die auf ihrer unteren Hälfte eine Oberflächenladung der Ladungsdichte σ_1 sowie auf der oberen Hälfte eine Ladung mit Ladungsdichte σ_2 trage, betrachtet man zunächst den einfachen Fall $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Sind beide Teilladungen demzufolge gleich groß, ist die elektrische Feldstärke im Inneren der Kugel Null. Außerhalb hingegen beträgt sie

$$\begin{aligned}
\iiint_V \operatorname{div}\vec{D}\mathrm{d}V = \oiint_{\partial V}\vec{D}\mathrm{d}\vec{A} &= \iiint_V \varrho_V \mathrm{d}V \\
\varepsilon \oiint_{\partial V} E_r\vec{e}_r \mathrm{d}A\vec{e}_r = \varepsilon E_r\, 4\pi r^2 &= \iiint_V \sigma\delta(r-R)\mathrm{d}V = \iint_A \sigma\mathrm{d}A = \sigma\, 4\pi R^2 = Q \\
\Rightarrow \qquad \vec{E}(r) &= \frac{\sigma}{\varepsilon}\left(\frac{R}{r}\right)^2\vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r = E_r\vec{e}_r \qquad\qquad (r \geq R)
\end{aligned}$$



Der Spannungstensor im Außenraum bestimmt sich in Kugelkoordinaten nun ganz analog gemäß

$$\mathbf{T} = \varepsilon\left[\vec{E}\circ\vec{E} - \frac{1}{2}\mathbb{1}\vec{E}^2\right] = \frac{\varepsilon}{2}\begin{pmatrix} E_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E_r^2 \end{pmatrix}$$

Als Integrationsbereich wird eine konzentrische Halbkugelschale gewählt, welche die obere Kugelhälfte umfasst. Lässt man die Dicke dieser Schale gegen Null gehen, so fällt die äußere Integrationsfläche mit der Kugeloberfläche zusammen. Bei der Berechnung der Kraft, die von der unteren Hälfte der Kugel auf die obere ausgeübt wird, ist demnach die Feldstärke bei $r = R$ auszuwerten und es folgt

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \oiint_{\partial V}\mathbf{T}\mathrm{d}\vec{A} = \frac{\varepsilon}{2}\iint_A \begin{pmatrix} E_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E_r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{2}\iint_A E_r^2(r{=}R)\vec{e}_r\mathrm{d}A \\
&= \frac{\sigma^2}{2\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta\end{pmatrix}R^2\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \frac{\sigma^2R^2}{2\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin^2\vartheta \\ \sin\varphi\sin^2\vartheta \\ \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\end{pmatrix}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{\sigma^2R^2}{2\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\begin{pmatrix}\sin\varphi\sin^2\vartheta \\ -\cos\varphi\sin^2\vartheta \\ \varphi\frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\end{pmatrix}\right]_0^{2\pi}\mathrm{d}\vartheta = \frac{\sigma^2R^2}{2\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ \pi\sin(2\vartheta)\end{pmatrix}\mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{\pi\sigma^2R^2}{2\varepsilon}\left[-\frac{1}{2}\cos(2\vartheta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_z = \underline{\frac{\pi\sigma^2R^2}{2\varepsilon}\vec{e}_z}
\end{aligned}$$

Erweitert man die Aufgabe schließlich auf den Fall ungleicher Ladungsdichten $\sigma_1 \neq \sigma_2$, handelt es sich hierbei um ein sogenanntes Zweikörperproblem. Für dessen Lösung kann das zuvor erhaltene Ergebnis genutzt werden und muss dieses lediglich mit einem zusätzlichen Skalierungsfaktor versehen werden. Die wirkende Kraft beträgt dann

$$\underline{\vec{F}' = \vec{F}\cdot\frac{\sigma_2}{\sigma}}$$

2 Aufgaben zu Wellenpaketen

In Medien, in denen die Wellenzahl k nichtlinear von der Frequenz ω einer elektromagnetischen Welle abhängt, ist auch die Phasengeschwindigkeit v_P frequenzabhängig. Dieser als Dispersion bekannte Effekt führt dazu, dass Wellenpakete, welche aus einer Überlagerung zahlreicher Wellen unterschiedlicher Frequenz bestehen, während der Propagation durch ein dispersives Medium ihre Gestalt verändern, da sich bestimmte Teilwellen stets schneller oder langsamer als andere ausbreiten.

Zur weiteren Diskussion dieses physikalischen Effektes werden häufig Wellenpakete betrachtet, deren Gewichtsfunktion bzw. Einhüllende die Form einer GAUSS-Verteilung aufweist. Ein solches GAUSSsches Wellenpaket $u(x,t)$ sei zum Anfangszeitpunkt $t=0$ gemäß

$$u(x,t=0) = e^{-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2}}$$

definiert, wobei Δx als Maß für die „Ortsunschärfe“ des Wellenpaketes aufgefasst wird. Die Entwicklung vom Impulsraum in den Ortsraum ist durch

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(k) e^{-\mathrm{j}kx} e^{\mathrm{j}\omega(k)t} \mathrm{d}k \tag{1}$$

gegeben, wobei $u(k)$ die FOURIER-Transformierte von $u(x,t=0)$ bezeichnet.

(a) Um nachzuweisen, dass das Wellenpaket auch im Impulsraum ein GAUSSsches Profil hat, wird dessen Definitionsgleichung mithilfe der Entwicklungsrelation vom Orts- in den Impulsraum transformiert und der entstehende Ausdruck soweit umgeformt, bis dieser die Gestalt einer GAUSS-Verteilung annimmt. Für die Hintransformation gilt analog zur gegebenen Rücktransformation

$$u(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{\mathrm{j}kx} e^{\mathrm{j}\omega(k)t} \mathrm{d}x \tag{2}$$

sodass sich hieraus zum Zeitpunkt $t=0$ ergibt

$$u(k,t{=}0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t{=}0) e^{\mathrm{j}kx} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2} + \mathrm{j}kx\right) \mathrm{d}x$$

Im Exponenten des Integranden führt man nun eine quadratische Ergänzung wie folgt durch

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{2(\Delta x)^2} - \mathrm{j}kx &= \left(\frac{x}{\sqrt{2}\Delta x}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\sqrt{2}\Delta x}\right)\frac{\mathrm{j}k\sqrt{2}\Delta x}{2} + \left(\frac{\mathrm{j}k\Delta x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{j}k\Delta x}{\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{x}{\sqrt{2}\Delta x} - \frac{\mathrm{j}k\Delta x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \mathrm{j}^2\left(\frac{k\Delta x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{x - \mathrm{j}k(\Delta x)^2}{\sqrt{2}\Delta x}\right)^2 + \frac{k^2(\Delta x)^2}{2} \\
&= \frac{\left(x - \mathrm{j}k(\Delta x)^2\right)^2}{2(\Delta x)^2} + \frac{k^2(\Delta x)^2}{2}
\end{aligned}$$

In die Transformationsgleichung eingesetzt, liefert dies

$$\begin{aligned}
u(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\left(x - \mathrm{j}k(\Delta x)^2\right)^2}{2(\Delta x)^2} - \frac{k^2(\Delta x)^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \exp\left(-\frac{k^2(\Delta x)^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\left(x - \mathrm{j}k(\Delta x)^2\right)^2}{2(\Delta x)^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \exp\left(-\frac{k^2(\Delta x)^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\left(\frac{x}{\Delta x} - \mathrm{j}k\Delta x\right)^2}{2}\right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Über die Substituion

$$x' := \frac{x}{\Delta x} - \mathrm{j}k\Delta x \qquad , \qquad \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\Delta x} \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{d}x = \Delta x \mathrm{d}x'$$

erhält man den Ausdruck

$$u(k) = \Delta x \exp\left(-\frac{k^2(\Delta x)^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x'^2}{2}\right) \mathrm{d}x'$$

der sich mithilfe der Identität

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \overset{x':=x-\mu}{\underset{\sigma=1}{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x'^2}{2}} \mathrm{d}x' = 1$$

schließlich weiter vereinfacht zu

$$u(k) = \Delta x \exp\left(-\frac{k^2(\Delta x)^2}{2}\right)$$

Identifiziert man letztlich noch die Ortsunschärfe Δx als Reziprokes der Impulsunschärfe Δk, folgt als Ergebnis

$$\underline{u(k) = \frac{1}{\Delta k} \exp\left(-\frac{k^2}{2(\Delta k)^2}\right)}$$

Die Beziehung $\Delta x \Delta k = 1$ bedeutet dabei, dass ein im Ortsraum sehr genau lokalisiertes Wellenpaket $u(x)$ mit geringer Ortsunschärfe im Impulsraum nur „verschmiert“ bzw. delokalisiert erscheint, also eine hohe Impulsunschärfe aufweist. Gleichermaßen wäre ein Wellenpaket mit definiertem k (d.h. sehr schmaler Gauss-Peak mit $\Delta k \to 0$) räumlich nicht mehr lokalisierbar.

(b) Da sich die Teilwellen des Wellenpaketes aufgrund der Dispersion nicht mit einer einheitlichen Phasengeschwindigkeit v_P ausbreiten, ist es sinnvoll nur das Maximum der Gewichtsfunktion $u(x)$ mit Wellenzahl k_0 und Frequenz ω_0 näher zu betrachten. Dieses bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit - der sogenannten Gruppengeschwindigkeit v_g - im Medium fort. Dies lässt sich zeigen, indem die Relation $\omega(k)$ in erster Ordnung in k um k_0 entwickelt wird. Es gilt

$$\omega(k) = \underbrace{\omega(k_0)}_{=\omega_0} + \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0}}_{=v_g} (k - k_0) + \ldots \quad \approx \quad \omega_0 + v_g(k - k_0)$$

Einsetzen in die Transformationsrelation (1) liefert

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(k) \exp\Big[\mathrm{j}\big(\omega(k)t - kx\big)\Big] \mathrm{d}k \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(k) \exp\Big[\mathrm{j}\Big(\omega_0 t + v_g t(k-k_0) - (k-k_0+k_0)x\Big)\Big] \mathrm{d}k \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(k) \exp\Big[\mathrm{j}(\omega_0 t - k_0 x) - \mathrm{j}(k-k_0)\underbrace{(x - v_g t)}_{=:x'}\Big] \mathrm{d}k \\
&\approx \exp\Big[\mathrm{j}(\omega_0 t - k_0 x)\Big] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(k) \exp\Big(-\mathrm{j}(k-k_0)x'\Big) \mathrm{d}k \\
\Rightarrow \qquad u(x,t) &\approx \underline{\exp\Big[\mathrm{j}(\omega_0 t - k_0 x)\Big] \cdot u(x', t=0) = e^{\mathrm{j}(\hat{\omega}t + \hat{\varphi})} \cdot u(x - v_g t, 0)}
\end{aligned}$$

Hieraus wird ersichtlich, dass sich das Maximum des Wellenpaketes bis auf einen Phasenfaktor in der Zeit t um die Strecke $v_g t$ vom Ursprung entfernt.

(c) Um abzuschätzen, wie schnell sich das Wellenpaket verbreitert, wird die TAYLOR-Entwicklung von $\omega(k)$ der vorangegangenen Teilaufgabe bis zum quadratischen Term durchgeführt:

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + \left.\frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0} (k-k_0) + \underbrace{\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\omega(k)}{\mathrm{d}k^2}\right|_{k_0}}_{=:\beta} (k-k_0)^2 = \omega_0 + v_g(k-k_0) + \beta(k-k_0)^2$$

Der zusätzliche Faktor β, der sich durch die zweite Ableitung nach k ergibt, wird dabei häufig als Dispersionsparameter bezeichnet. Setzt man diesen Ausdruck in Gleichung (1) ein, erhält man

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(k) \exp\Big[\mathrm{j}\big(\omega(k)t - kx\big)\Big]\mathrm{d}k \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(k) \exp\Big[\mathrm{j}\Big(\omega_0 t + v_g t(k-k_0) + \beta t(k-k_0)^2 - (k-k_0+k_0)x\Big)\Big]\mathrm{d}k \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(k) \exp\Big[\mathrm{j}(\omega_0 t - k_0 x) - \mathrm{j}\underbrace{(x - v_g t)}_{=:x'}(k-k_0) + \mathrm{j}\beta t(k-k_0)^2\Big]\mathrm{d}k \\
&\approx \exp\Big[\mathrm{j}(\omega_0 t - k_0 x)\Big] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(k) \exp\Big[-\mathrm{j}x'(k-k_0)\Big] \exp\Big[\mathrm{j}\beta t(k-k_0)^2\Big]\mathrm{d}k
\end{aligned}$$

Mit der in Teilaufgabe a) ermittelten Relation $u(k)$ und der Substitution $\alpha := 2(\Delta k)^2$ ist nun

$$u(k)\exp\Big[\mathrm{j}\beta t(k-k_0)^2\Big] = \frac{1}{\Delta k}\exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{\alpha} + \mathrm{j}\beta t(k-k_0)^2\right] = \frac{1}{\Delta k}\exp\left[-\underbrace{\left(\frac{1}{\alpha} - \mathrm{j}\beta t\right)}_{=:a}(k-k_0)^2\right]$$

und es ergibt sich

$$u(x,t) \approx \exp\Big[\mathrm{j}(\omega_0 t - k_0 x)\Big] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta k} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[-a(k-k_0)^2\Big] \exp\Big[-\mathrm{j}x'(k-k_0)\Big]\mathrm{d}k$$

Unter Nutzung der Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-ax^2 - \mathrm{j}2bx\Big)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{b^2}{a}\right)$$

mit $x \mathrel{\widehat{=}} k - k_0$ und $2b \mathrel{\widehat{=}} x' = x - v_g t$ wird hieraus schließlich

$$\underline{u(x,t) \approx \exp\Big[\mathrm{j}(\omega_0 t - k_0 x)\Big] \frac{1}{\sqrt{2a}\Delta k} \exp\left(-\frac{(x-v_g t)^2}{4a}\right)}$$

Da sich mit dem „Verlaufen“ des Impulses auch dessen Energieverteilung immer mehr in den Raum ausbreitet, die Energie einer Welle jedoch streng mit ihrem Amplituden-Betragsquadrat korreliert, wird zur Bestimmung der Verbreiterungsgeschwindigkeit des Wellenpaketes im Folgenden das Betragsquadrat von $u(x,t)$ gebildet. Dieses ist

$$|u(x,t)|^2 = u(x,t)\cdot u(x,t)^* = \frac{1}{\sqrt{2a}\sqrt{2a^*}(\Delta k)^2} \exp\left(-\frac{(x-v_g t)^2}{4a} - \frac{(x-v_g t)^2}{4a^*}\right)$$

Die interessierende Impulsbreite wird im Wesentlichen durch das Argument der Exponentialfunktion bestimmt, weshalb es genügt, dieses weiter auszuwerten. Man formt zunächst weiter um und erhält

$$\begin{aligned}
-\frac{(x-v_g t)^2}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^*}\right) &= -\frac{(x-v_g t)^2}{4}\frac{a+a^*}{aa^*} = -\frac{(x-v_g t)^2}{4}\frac{\frac{1}{\alpha}-\mathrm{j}\beta t+\frac{1}{\alpha}+\mathrm{j}\beta t}{\left(\frac{1}{\alpha}-\mathrm{j}\beta t\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\mathrm{j}\beta t\right)} \\
&= -\frac{(x-v_g t)^2}{2\alpha}\frac{1}{\frac{1}{\alpha^2}+\beta^2 t^2} = -\frac{(x-v_g t)^2}{2\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\beta^2 t^2\right)} \\
&= \underline{-\frac{(x-v_g t)^2}{2x_0^2} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = \sqrt{\frac{1}{\alpha}+\alpha\beta^2 t^2}}
\end{aligned}$$

Der Term $x - v_g t$ ist konstant, also berechnet sich die zeitliche Änderung des Argumentes über die Ableitung von x_0 zu

$$\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}+\alpha\beta^2 t^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2\alpha\beta^2 t}{\sqrt{\frac{1}{\alpha}+\alpha\beta^2 t^2}} = \underline{\frac{\alpha\beta^2}{\sqrt{\frac{1}{\alpha t^2}+\alpha\beta^2}}}$$

Mit $\alpha = 2(\Delta k)^2$ gilt für die Einheiten $[\alpha] = \frac{1}{\mathrm{m}^2}$ und $[\beta] = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$ und die Dimension des obigen Ausdrucks ist mit $[\dot{x_0}] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auch die einer Geschwindigkeit. Betrachtet man zum Schluss noch den zeitlichen Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{\alpha\beta^2}{\sqrt{\frac{1}{\alpha t^2}+\alpha\beta^2}} = \sqrt{\alpha}\beta = \sqrt{2}\beta\Delta k = \frac{\sqrt{2}\beta}{\Delta x}$$

wird deutlich, dass die Geschwindigkeit der Impulsverbreiterung direkt vom Dispersionsparameter β abhängt, in stark dispersiven Medien also umso höher ist. Gleichzeitig besteht eine indirekte Proportionalität zur Ortsunschärfe Δx, d.h. ein räumlich sehr eng lokalisiertes Wellenpaket wird sich wesentlich schneller verbreitern als ein weniger schmales.